Análise Matemática IV

1º Teste - 29 de Outubro de 2005

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1.

a) Verifique se $\{(\sqrt[3]{z})^2\} = \{\sqrt[3]{z^2}\}$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. (2)

Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = r^{2/3}e^{2i\theta/3}$ para $r \geq 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$.

b) Usando a equação de Cauchy-Riemann na forma polar, $f_r = -\frac{i}{r}f_\theta$, e $f' = e^{-i\theta}f_r$, estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada. (2)

c) Escreva uma representação paramétrica do segmento γ que une 1 a i. (1)

d) Dê a definição de $\int_\gamma f'(z)\, dz$ em termos de um integral onde intervenha a representação paramétrica de γ. (1)

e) Calcule o integral da alínea anterior, apresentando o resultado na forma cartesiana. (2)

f) Para que curvas fechadas $\hat{\gamma}$ em $\mathbb{C}$ garante o Teorema de Cauchy que $\int_{\hat{\gamma}} f(z)\, dz = 0$? (2)

2.

a) Classifique as singularidades de $z \mapsto \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$ e calcule os resíduos nas que se situam no semiplano superior. (3)

b) Usando o Teorema dos Resíduos, calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\, dx$. (3)

3. Determine geometricamente a imagem da região $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \Re z < 0 \text{ e } \Im z > 0\}$ pela transformação $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$. (4)