Análise Matemática IV

Exame de Época Especial - 30 de Setembro de 96

Fís. e Matem.

Resolução

1.

a) Suponhamos que $f'(re^{i\theta})$ existe. Então, no ponto $re^{i\theta}$, existem nomeadamente as seguintes derivadas:

- a derivada de f ao longo da semirecta que passa pela origem e por $re^{i\theta}$, e que vale

$$\begin{aligned} f'(re^{i\theta}) &= \lim_{\rho\to 0} \frac{f((r+\rho)e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} \\ &= e^{-i\theta} \lim_{\rho\to 0} \frac{g(r+\rho,\theta) - g(r,\theta)}{\rho} \\ &= e^{-i\theta} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta), \text{ e} \end{aligned}$$

- a derivada de f ao longo da circunferência de centro na origem e raio r, e que vale

$$\begin{aligned} f'(re^{i\theta}) &= \lim_{\phi\to 0} \frac{f(re^{i(\theta+\phi)}) - f(re^{i\theta})}{re^{i(\theta+\phi)} - re^{i\theta}} \\ &= -i\,\frac{e^{-i\theta}}{r} \lim_{\phi\to 0} \frac{f(re^{i(\theta+\phi)}) - f(re^{i\theta})}{\phi} \frac{i\phi}{e^{i\phi}-1} \\ &= -i\,\frac{e^{-i\theta}}{r} \lim_{\phi\to 0} \frac{g(r,\theta+\phi) - g(r,\theta)}{\phi} \times \lim_{\phi\to 0} \frac{i\phi}{e^{i\phi}-1} \\ &= -i\,\frac{e^{-i\theta}}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta). \end{aligned}$$

Igualando as duas expressões obtidas, obtém-se $\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{i}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}$.

b) Suponhamos que $|f|^2 = f\bar{f} = $ constante. Derivando em ordem a x e em ordem a y, obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{f}_x f + f_x \bar{f} &= 0, \\ \bar{f}_y f + f_y \bar{f} &= 0. \end{aligned}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_x & f_x \\ \bar{f}_y & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \bar{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando as equações de Cauchy-Riemann, $f_y = i f_x$,

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_x & f_x \\ -i\bar{f}_x & i f_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \bar{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se que $f = 0$ ou $f_x = 0$.
Se em algum ponto $f = 0$, então $f \equiv 0$, porque $f =$ constante. Se f nunca se anular, então $f_x \equiv 0$. Logo, $f_y \equiv 0$. Integrando ao longo de uma linha poligonal com lados paralelos aos eixos coordenados, obtém-se $f =$ constante.

c) $f(x+iy) = \frac{(x+iy)^2}{|x+iy|^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2ixy}{x^2+y^2}$.

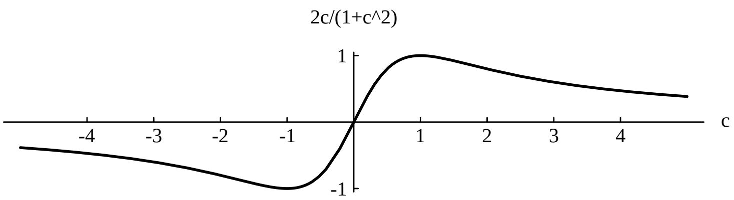
d) $f(re^{i\theta}) = e^{2i\theta}$.
$g_r = 0$ e $g_\theta = 2i\, e^{2i\theta}$.
$-\frac{i}{r}\, g_\theta = \frac{2}{r}\, e^{2i\theta} \neq 0$.

e) $|f| \equiv 1$, mas f não é constante. Logo, f não é analítica.

f) $\int_{|z|=R} f(z)\, dz = \int_{|z|=R} \frac{z^2}{|z|^2}\, dz = \frac{1}{R^2} \int_{|z|=R} z^2\, dz = 0$, porque z^2 é analítica e $|z| = R$ é um contorno fechado (Teorema de Cauchy).
O Teorema de Morera afirma que se f está definida e é contínua numa região Ω, e se $\int_C f(z)\, dz = 0$, para todos os contornos fechados C em Ω, então f é analítica em Ω. Ora, a condição $\int_C f(z)\, dz = 0$ só foi verificada para $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R,\ R > 0\}$, e não para todos os contornos fechados C.

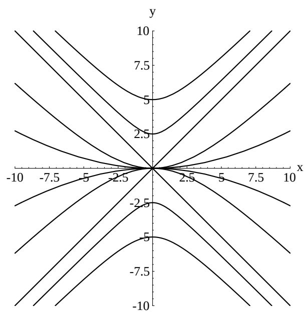
2.

a) A equação não permite determinar o declive das soluções que passam pela origem $(x, y) = (0, 0)$.
Resolvendo para y', obtém-se $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. O declive das soluções é nulo sobre o eixo dos y's ($x = 0$).
Tirando partido do segundo membro ser uma função homogénea, escrevemos $y' = \frac{2(y/x)}{1+(y/x)^2} = \frac{2c}{1+c^2}$, onde $c = y/x$. Ou seja, o declive das soluções é constante quando c é constante, isto é, sobre rectas que passam pela origem.
Na figura seguinte faz-se um esboço do gráfico da função $c \mapsto \frac{2c}{1+c^2}$:



$c \mapsto \frac{2c}{1+c^2}$.

A função y' anula-se sobre os eixos coordenados; tem um máximo absoluto em $x = y$ que vale 1; e tem um mínimo absoluto em $x = -y$ que vale -1.
$y = 0$, $y = x$ e $y = -x$ são soluções da equação diferencial.
Na figura seguinte faz-se um esboço das soluções da equação diferencial:



Esboço das soluções de $2xy - (x^2 + y^2)y' = 0$.

b) A equação é da forma $M + Ny' = 0$, com $M(x, y) = 2xy$ e $N(x, y) = -(x^2 + y^2)$. A equação não é exacta porque $M_y \neq N_x$.
Multiplicando a equação por μ obtém-se $\mu M + \mu N y' = 0$. Para que esta equação seja exacta devemos ter $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, ou seja, $\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$.
Se $\mu = \mu(x)$, então $\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$. No caso presente segue-se que $\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{4x}{-(x^2+y^2)}$. Tal como o primeiro membro, o segundo membro deveria ser apenas função de x. Conclui-se que a equação não admite um factor integrante que seja apenas função de x.
Se $\mu = \mu(y)$, então $\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M}$. No caso presente segue-se que $\frac{\mu_y}{\mu} = -\frac{2}{y}$. Determinemos uma solução desta equação. Como $\ln|\mu| = -2\ln|y| + k$, onde k é constante, podemos tomar $\mu = \frac{1}{y^2}$.
Note-se que $y \equiv 0$ é solução da equação. Da unicidade, garantida pelo Teorema de Picard para $(x, y) \neq (0, 0)$, que é a região onde $(x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2+y^2}$ é de classe C^1, conclui-se que uma solução que passe por (x_0, y_0) com $y_0 \neq 0$ nunca tem ordenada nula, excepto possivelmente se passar pela origem.
A equação $\mu M + \mu N y' = \frac{2x}{y} - \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) y' = 0$ é exacta.
Determinemos ϕ tal que $\frac{d}{dx}\phi(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' = \frac{2x}{y} - \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) y'$.
Obtém-se $\phi(x, y) = \frac{x^2}{y} - y - c$, com $c \in \mathbb{R}$.
Portanto, $\frac{x^2}{y} - y = c$, com $c \in \mathbb{R}$, são soluções da equação diferencial.
Resolvendo para x em função de y, obtém-se $x = \pm\sqrt{y^2 + cy}$.
Resolvendo para y em função de x, obtém-se $y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4x^2}}{2}$. Note-se

que $|c| \leq \sqrt{c^2+4x^2}$. Logo, no semiplano superior $y = \frac{-c+\sqrt{c^2+4x^2}}{2}$, enquanto no semiplano inferior $y = \frac{-c-\sqrt{c^2+4x^2}}{2}$.
Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. O Teorema de Picard garante existência e unicidade de solução local para $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. As soluções são as obtidas acima. Para estudar a unicidade global há que analisar quais as soluções que passam em $(0,0)$.
Pela simetria das soluções, basta considerar o que se passa no primeiro quadrante. Se $x_0 > y_0$, então $\frac{x_0^2}{y_0} - y_0 > 0$, enquanto que se $x_0 < y_0$, então $\frac{x_0^2}{y_0} - y_0 < 0$. Por outro lado, para $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$, o valor de y para $x = 0$ é 0 se $x_0 > y_0$, e é $-\frac{x_0^2}{y_0} + y_0$ se $x_0 < y_0$.
Esta análise conduz aos resultados seguintes, conforme o esboço de soluções:

- Se $|y_0| > |x_0|$, então há apenas uma solução da equação diferencial que passa por (x_0, y_0). O c correspondente é $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$.
- Se $|x_0| \geq |y_0|$, então a equação diferencial tem infinitas soluções que passam no ponto (x_0, y_0). Se $y_0 = 0$, então $y \equiv 0$, para x com o sinal de x_0; podemos considerar que este caso corresponde a $c = \infty$. Se $y_0 \neq 0$, deverá ser $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$ para x com o sinal de x_0. Mas o valor de c não está univocamente determinado para x com sinal contrário ao de x_0.

c) As curvas ortogonais às soluções da equação dada satisfazem $y' = -\frac{x^2+y^2}{2xy}$, pois têm declives que são o simétrico do inverso do declive das soluções da equação dada.
A equação $(x^2+y^2) + 2xyy' = 0$ é exacta. As suas soluções são $\frac{x^3}{3} + xy^2 = c$, com $c \in \mathbb{R}$.

3.

a) Suponhamos que f tem um zero de ordem m no ponto $a \in \Omega$. Podemos escrever $f(z) = (z-a)^m f_m(z)$, com $f_m(a) \neq 0$. Então, $f'(z) = m(z-a)^{m-1} f_m(z) + (z-a)^m f_m'(z)$. Portanto, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{f_m'(z)}{f_m(z)}$. Logo, $\frac{f'}{f}$ tem um polo simples em a, com resíduo m.
Como o raciocínio do parágrafo anterior é válido para todos os zeros de f, segue-se, do Teorema dos Resíduos, que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ é igual ao número de zeros de f em Ω, contando multiplicidades.

b) $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{du+idv}{u+iv} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{(u\,du+v\,dv)+i(-v\,du+u\,dv)}{u^2+v^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{-v\,du+u\,dv}{u^2+v^2}$, porque $\frac{u\,du+v\,dv}{u^2+v^2} = \frac{1}{2}\frac{d(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = \frac{1}{2}\,d\ln(u^2+v^2)$, ou seja, porque a forma diferencial $\frac{u\,du+v\,dv}{u^2+v^2}$ é exacta.

4.

a) Se $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, então $\frac{2xy}{x^2+y^2} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$.
A função $g :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$, definida por $g(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \sin(2\theta))$ é uma parametrização de $C_r \setminus \{(1,0,0)\}$.
O vector $(r\sin\theta, r\cos\theta, 2\cos(2\theta))$ é tangente a C_r e $r\sin\theta\, dx + r\cos\theta\, dy + 2\cos(2\theta)\, dz$ é uma orientação para C_r.

b) $\lim_{r\to 0} \int_{C_r} o = \lim_{r\to 0} \int_{C_r} o \cdot o\, ds = \lim_{r\to 0} \int_{C_r} 1\, ds =$
$\lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + 4\cos^2(2\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 2|\cos(2\theta)|\, d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2\theta)\, d\theta =$
8. Para passar o limite para dentro do integral fez-se uma aplicação simples do Teorema da Convergência Dominada.