Análise Matemática IV

Exame de Época Especial - 30 de Setembro de 96

Fís. e Matem.

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$, aberto conexo, e $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Escrevemos $f(re^{i\theta}) = g(r, \theta)$, onde r e $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Como sabe, as equações de Cauchy-Riemann na forma polar escrevem-se $\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{i}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}$. Deduza estas equações. (1.5)

b) Prove que se f for analítica e o seu módulo for constante, então f é constante. (1.5)

Considere agora $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{z^2}{|z|^2}$.

c) Determine as partes real e imaginária de $f(x + iy)$ em função de x e y, onde x e $y \in \mathbb{R}$. (1.5)

d) Deduza da alínea **a)** que f não é analítica. (1.5)

e) Deduza da alínea **b)** que f não é analítica. (1.5)

f) Seja $R > 0$, arbitrário. Mostre que $\int_{|z|=R} f(z)\, dz = 0$. (1.5)
Explique porque não há contradição com o Teorema de Morera.

2. Considere a equação diferencial $2xy - (x^2 + y^2)y' = 0$.

a) Esboce o campo de direcções e as soluções da equação. (2)

b) Determine um factor integrante para a equação e determine as soluções da equação. (1.5)

c) Determine as curvas ortogonais às soluções da equação. (1.5)

3. Seja Ω um domínio regular em $\mathbb{C}$ e $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$, uma função analítica. Suponha que f não se anula em $\partial\Omega$. Escrevemos $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$, onde x e $y \in \mathbb{R}$, e u e v são campos escalares reais.

a) Prove que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{df}{f}$ é igual ao nº de zeros de f em Ω, contando multiplicidades. (1.5)

b) Mostre que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{-v\,du+u\,dv}{u^2+v^2}$. (1.5)

***4.** Seja $r > 0$. Considere a variedade C_r de dimensão um, contida no gráfico de $(x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2+y^2}$ e cuja projecção no plano x, y é a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$.

a) Calcule uma orientação, o, para C_r. (1.5)

b) Calcule $\lim_{r\to 0} \int_{C_r} o$. (1.5)