Análise Matemática IV

Exame de 2ª Época - 20 de Julho de 96

Fís. e Matem.

Resolução

1.

a) $dH = \frac{\partial H}{\partial x}\,dx + \frac{\partial H}{\partial y}\,dy = (ax+by)\,dx + (bx+cy)\,dy$.
$dH(u) = \frac{\partial H}{\partial x}u_1 + \frac{\partial H}{\partial y}u_2 = (ax+by)u_1 + (bx+cy)u_2$.
$v_H(x,y) = (\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}) = (bx+cy, -ax-by)$.
$\omega(v_H, u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial y} & -\frac{\partial H}{\partial x} \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial H}{\partial x}u_1 + \frac{\partial H}{\partial y}u_2 = (ax+by)u_1 + (bx+cy)u_2$.
$dH(v_H) = \omega(v_H, v_H) = 0$, porque, sendo ω uma forma, ω é alternante.
Em alternativa, $dH(v_H) = (\frac{\partial H}{\partial x}\,dx + \frac{\partial H}{\partial y}\,dy)\,(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}) = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} = 0$.

b) A função $(x,y)_t$, definida por $(x_0,y_0) \mapsto (x(t), y(t))$, é uma transformação linear representada pela matriz e^{At}. Por definição, o Jacobiano desta transformação é o determinante de e^{At}.
Em alternativa, $\begin{bmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial x_0} & \frac{\partial x(t)}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y(t)}{\partial x_0} & \frac{\partial y(t)}{\partial y_0} \end{bmatrix} = e^{At}$. Logo, $\frac{\partial (x,y)_t}{\partial (x_0,y_0)} = \det e^{At}$.

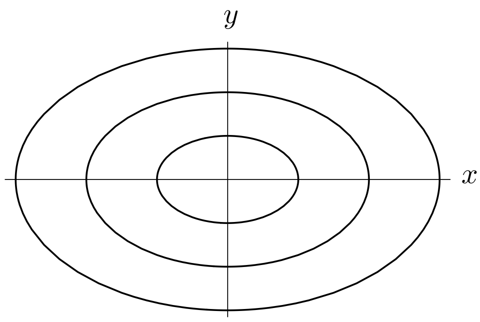
c) De $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$, segue $\det e^{At} = \det S \det e^{Jt} \det S^{-1} = \det e^{Jt} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \star \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t} = e^{\operatorname{tr} A\, t}$.
A segunda igualdade é imediata, já que $\operatorname{tr} A = 0$.

d) O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 - b^2 + ac$.
$\lambda_1 = \sqrt{b^2 - ac}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{b^2-ac} = -\lambda_1$.
(Nota: De $\operatorname{tr} A = 0$ também se conclui $\lambda_2 = -\lambda_1$.)
Os valores próprios de e^{At} são $\mu_1 = e^{\lambda_1 t}$ e $\mu_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{-\lambda_1 t}$.
$1/\mu_1 = \mu_2$ (e $1/\mu_2 = \mu_1$).
A matriz e^{At} é real, porque A é real. Logo, o polinómio característico de e^{At} tem coeficientes reais. Conclui-se que se μ é valor próprio de e^{At}, então também $\bar{\mu}$ é valor próprio de e^{At}.
Já verificámos que se μ é valor próprio da e^{At}, então também $\bar{\mu}$ e $1/\mu$ são valores próprios de e^{At}. Portanto, $1/\bar{\mu}$ é valor próprio de e^{At}.

e) $(x,y)_t^\star\,\omega = (\frac{\partial x}{\partial x_0}\,dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0}\,dy_0) \wedge (\frac{\partial y}{\partial x_0}\,dx_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0}\,dy_0) = \frac{\partial (x,y)_t}{\partial (x_0,y_0)}\,dx_0 \wedge dy_0 = \det e^{At}\,\omega = \omega$.

f) $H(x,y) = \frac{1}{2}(kx^2 + \frac{1}{m}y^2)$.
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{m}y, \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx. \end{cases}$$

H é constante ao longo das soluções do sistema. De facto, $\frac{d}{dt}H(x,y) = dH(\dot{x},\dot{y}) = dH(v_H) = 0$.
As curvas $H = \frac{c}{2}$, $c \in \mathbb{R}^+$, são elipses que intersectam o eixo dos x's em $\pm\sqrt{\frac{c}{k}}$ e o eixo dos y's em $\pm\sqrt{cm}$.
Por outro lado, o campo vectorial $(\frac{1}{m}y, -kx)$ anula-se apenas no ponto $(0,0)$. Se $y > 0$, então a primeira componente do campo é positiva, e se $y < 0$, então a primeira componente do campo é negativa.
Em alternativa, se $y > 0$, então $\dot{x} > 0$, e se $y < 0$, então $\dot{x} < 0$.
O único ponto de equilíbrio do sistema é $(0,0)$.
Vamos supor que $\frac{1}{k} > m$. O retrato de fase é:



O retrato de fase do sistema.

g) De $\dot{x} = \frac{1}{m}y$ e $\dot{y} = -kx$, segue $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$.
A solução geral de $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ é $x(t) = \alpha\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t) + \beta\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t)$, α e $\beta \in \mathbb{R}$.
A solução que verifica $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ é $x(t) = x_0\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t) + \dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t)$.

2.

a) $\int_C \frac{-2w}{1-w^2}\,dw = \int_C \left(\frac{1}{w-1} + \frac{1}{w+1}\right)\,dw = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$.

b) Seja $z_0 \in D$. Sejam γ_1 e γ_2 dois contornos em D de $\sqrt{2}$ a z_0. $\int_{\gamma_1}\frac{-2w}{1-w^2}\,dw - \int_{\gamma_2}\frac{-2w}{1-w^2}\,dw = \int_C \frac{-2w}{1-w^2}\,dw$, onde C é um contorno fechado em D. Pela alínea anterior a diferença vale $4k\pi i$, onde k é um inteiro, igual ao número de voltas que $\gamma_1 - \gamma_2$ dá em torno de zero, no sentido directo.
$i\exp\left[\frac{1}{2}\int_{\gamma_1}\frac{-2w}{1-w^2}\,dw\right] = i\exp\left[\frac{1}{2}\int_{\gamma_2}\frac{-2w}{1-w^2}\,dw + 2k\pi i\right] = i\exp\left[\frac{1}{2}\int_{\gamma_2}\frac{-2w}{1-w^2}\,dw\right]$.

c) Sigamos a sugestão. Suponhamos ainda que o fecho de B não contém os pontos -1 e 1. Provemos que a função $g : B \to \mathbb{C}$, definida por $g(z) = \int_\gamma \frac{-2w}{1-w^2}\,dw$ é uma função diferenciável em z_0. Seja $z \in B$. Como $w \mapsto \frac{-2w}{1-w^2}$ é analítica em B, $g(z) - g(z_0) = \int_{z_0}^{z}\frac{-2w}{1-w^2}\,dw$, onde o integral é calculado ao longo de qualquer contorno, δ, em B, de z_0 a z.

Escolha-se para δ o segmento de recta de z_0 a z, $w(t) = z_0 + t(z - z_0)$, $t \in [0,1]$. Tem- -se $g(z) - g(z_0) = \int_0^1 \frac{-2w(t)}{1-w^2(t)}\, dt\, (z - z_0)$. Portanto, $\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \int_0^1 \frac{-2w(t)}{1-w^2(t)}\, dt$. Como o fecho de B não contém os pontos -1 e 1, o módulo da função $w \mapsto \frac{-2w}{1-w^2}$ é limitado, em B, por uma constante. Por outro lado, $w(t) \to z_0$, quando $z \to z_0$. Logo, $\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \int_0^1 \frac{-2z_0}{1-z_0^2}\, dt = \frac{-2z_0}{1-z_0^2}$.
A função f é diferenciável em z_0, porque é a composição de g com uma função diferenciável.

d) Da alínea anterior sabemos que $g'(z) = \frac{-2z}{1-z^2}$. Por consequência, $f'(z) = f(z)\, \frac{-z}{1-z^2}$.
$f^2(z)/(1 - z^2)$ é constante porque $\frac{d}{dz}\frac{f^2}{1-z^2} = \frac{2ff'(1-z^2)-f^2(-2z)}{(1-z^2)^2} = 2f\, \frac{f'(1-z^2)+zf}{(1-z^2)^2} = 0$.
O valor da constante é 1 porque $f^2(\sqrt{2})/(1 - (\sqrt{2})^2) = i^2/(-1) = 1$.

e) Seja $P = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < 1 \text{ e } 0 < \mathrm{Im}\, z < 1 - (\mathrm{Re}\, z)^2\}$.
Sejam γ um contorno em D que vai de $\sqrt{2}$ a z, e $\tilde\gamma$ um contorno em $\tilde D$ que vai de $\sqrt{2}$ a z.
Se $z_0 \notin P$, então $\tilde f(z_0) = f(z_0)$, porque podemos escolher $\tilde\gamma = \gamma$.
Seja $z_0 \in P$. Escolha-se o contorno γ, de $\sqrt{2}$ a z_0, contido no semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$. Escolha-se o contorno $\tilde\gamma$, de $\sqrt{2}$ a z_0, contido em $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z \leq 0\} \cup P$.
$\int_\gamma \frac{-2w}{1-w^2}\, dw - \int_{\tilde\gamma} \frac{-2w}{1-w^2}\, dw = \int_C \frac{-2w}{1-w^2}\, dw$, onde C é um contorno fechado, que dá uma volta em torno de 1, no sentido directo. Como $\int_{|z-1|=1} \frac{-2w}{1-w^2}\, dw = \int_{|z-1|=1} \left(\frac{1}{w-1} + \frac{1}{w+1}\right) dw = 2\pi i$, resulta que $f(z_0) = i \exp\left[\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{-2w}{1-w^2}\, dw\right] = i \exp\left[\frac{1}{2}\int_{\tilde\gamma} \frac{-2w}{1-w^2}\, dw + \pi i\right] = -\tilde f(z_0)$.