Análise Matemática IV

Exame de 2ª Época - 20 de Julho de 96

Fís. e Matem.

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Sejam a, b e $c \in \mathbb{R}$. Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $H(x,y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$, e o campo vectorial $v_H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $v_H = (\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x})$. Seja $u \in \mathbb{R}^2$ e ω a forma-2 definida por $\omega = dx \wedge dy$.

*__a)__ Verifique que $dH(u) = \omega(v_H, u)$. (2)
Verifique que $dH(v_H) = 0$.

Considere o sistema $\frac{d}{dt}(x,y) = v_H(x,y)$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ com } A = \begin{bmatrix} b & c \\ -a & -b \end{bmatrix}.$$

Como sabe, a solução que satisfaz $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Designe-se por $[x(x_0,y_0)(t), y(x_0,y_0)(t)]$ o valor desta solução no instante t. Para $t \in \mathbb{R}$, fixo mas arbitrário, designe-se também por $(x,y)_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função $(x_0,y_0) \mapsto [x(x_0,y_0)(t), y(x_0,y_0)(t)]$.

b) $\frac{\partial(x,y)_t}{\partial(x_0,y_0)} = \det e^{At}$. Justifique. (2)

Designem-se por λ_1 e λ_2 os valores próprios de A. Como sabe, $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$.

c) Prove que $\det e^{At} = e^{\operatorname{tr} A\, t} = 1$. Sugestão: Use $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$, mas não calcule e^{At}. (1.5)

d) Calcule λ_1 e λ_2. (1.5)
Verifique que se μ é valor próprio da e^{At}, então também $\bar{\mu}$, $1/\mu$ e $1/\bar{\mu}$ são valores próprios de e^{At}.

*__e)__ Verifique que $(x,y)_t^\star\, \omega = \omega$. (1.5)

Sejam k e $m \in \mathbb{R}^+$. Considere $a = k$, $b = 0$ e $c = \frac{1}{m}$.

f) Esboce o retrato de fase do sistema. (2)

g) Determine uma equação diferencial de segunda ordem, linear e homogénea, para x. (1.5)
Qual a solução dessa equação que verifica $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$?

2. Seja $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = t, \text{ com } t \in [-1,1]\}$. Seja C um contorno simples e fechado em D, que dá uma volta em torno da origem, no sentido directo.

a) Mostre que $\int_C \frac{-2w}{1-w^2}\, dw = 4\pi i$. (2)

Seja $f : D \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = i \exp\left[\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{-2w}{1-w^2}\, dw\right]$, onde γ é um contorno em D que vai de $\sqrt{2}$ a z.

b) Mostre que, de facto, f está bem definida, isto é, que não depende de γ. (2)

c) A função f é analítica. Justifique. Sugestão: Seja $z_0 \in D$ e B uma bola aberta, de centro em z_0, contida em D. Fixe-se um contorno em D de $\sqrt{2}$ a z_0. Para $z \in B$, escolha para γ a concatenação do contorno de $\sqrt{2}$ a z_0 com um contorno em B, de z_0 a z. Prove que f é diferenciável em z_0. (1.5)

d) Mostre que $z \mapsto f^2(z)/(1-z^2)$ é constante. (1.5)
Verifique que o valor da constante é 1.

Portanto, $f(z) = \sqrt{1-z^2}$.
Seja $\tilde{D} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = t + i(1-t^2), \text{ com } t \in [-1,1]\}$. Seja $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{C}$, definida por $\tilde{f}(z) = i \exp\left[\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{-2w}{1-w^2}\, dw\right]$, onde γ é um contorno em $\tilde{D}$ que vai de $\sqrt{2}$ a z.

e) Determine a relação entre f e $\tilde{f}$. (1)