

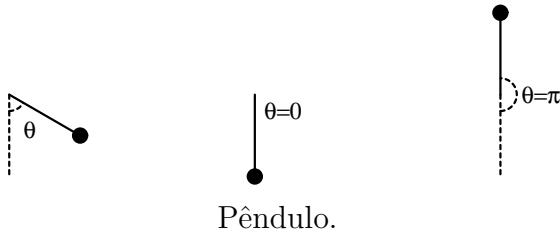
# Análise Matemática IV

2º Exame - 2 de Julho de 96

Fís. e Matem.

## Gráficos Complementares

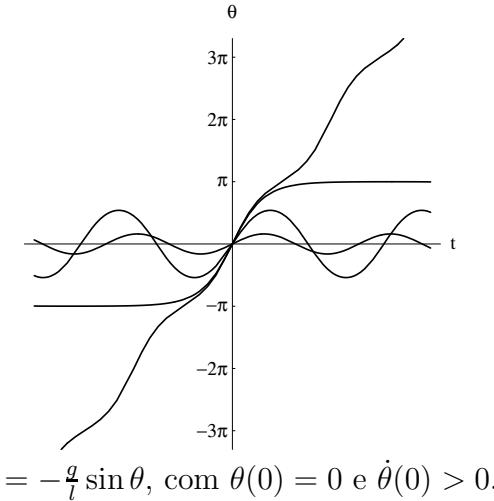
$H$  é a energia total de um pêndulo de massa unitária, sendo a energia total a soma da energia cinética,  $\frac{1}{2l^2}\gamma^2$ , com a energia potencial,  $-gl \cos \theta$ .



Pêndulo.

$l$  é o comprimento do pêndulo,  $g$  a aceleração da gravidade e  $\gamma$  é o momento angular do pêndulo, pelo que  $\gamma = I\omega = l^2m\dot{\theta} = l^2\dot{\theta}$ , ou seja,  $\dot{\theta} = \frac{1}{l^2}\gamma$ .

De  $\dot{\theta} = \frac{1}{l^2}\gamma$  e  $\dot{\gamma} = -gl \sin \theta$ , segue  $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$ . Os gráficos de quatro soluções de  $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$ , com  $\theta(0) = 0$  e  $\dot{\theta}(0) > 0$ , representam-se na figura seguinte.



$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta, \text{ com } \theta(0) = 0 \text{ e } \dot{\theta}(0) > 0.$$

A energia da solução que verifica  $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} |\theta(t)| = \pi$  é  $gl$ . Neste caso,

$$\frac{1}{2l^2}[\dot{\theta}(0)]^2 - gl \cos 0 = gl, \text{ ou seja, } \dot{\theta}(0) = 2\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Sugestão: Interprete fisicamente esta figura e o retrato de fase da alínea 1.f).