Análise Matemática IV

Exame de 2ª Época - 17 de Julho de 97

Civ., Fís. e Matem.

Resolução

1.

a) $\frac{1+z}{1-z} = \frac{-1+z+2}{1-z} = \frac{-2}{z-1} - 1$ tem um pólo de primeira ordem no ponto 1, pelo que a sua n-ésima potência tem um pólo de n-ésima ordem no ponto 1.

b) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = \left(\frac{-2}{z-1} - 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{-2}{z-1}\right)^{n-k} (-1)^k = \frac{(-2)^n}{(z-1)^n} + \ldots + n \cdot \frac{-2}{z-1}(-1)^{n-1} + (-1)^n$. O resíduo da n-ésima potência da função no ponto 1 é $2n(-1)^n$.

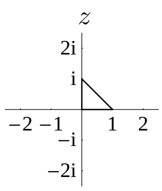
Em alternativa, $\text{Res} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n \Big|_{z=1} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n (z-1)^n \Big|_{z=1} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (1+z)^n \Big|_{z=1} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{n!}{1!} (1+z)^1 \big|_{z=1} = 2n(-1)^n$.

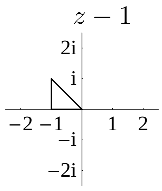
$\int_{|z-1|=1} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n dz = 2\pi i \,\text{Res} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n \Big|_{z=1} = 4n\pi i(-1)^n$.

c) Seja $\text{Log}\, z = \log r + i\theta$, se $z = re^{i\theta}$ com $-\pi < \theta < \pi$, o valor principal do logarítmo. A função $z \mapsto -z - 2\text{Log}\,(1-z)$ é uma primitiva de $z \mapsto -1 + \frac{2}{1-z}$.

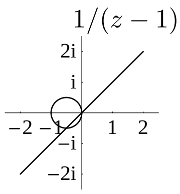
$\int_{-1}^{i} \frac{1+z}{1-z}\, dz = [-z - 2\text{Log}\,(1-z)]|_{-1}^{i} = -i - 2\text{Log}\,(1-i) + (-1) + 2\text{Log}\, 2 = -i - 2\text{Log}\,(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}) + (-1) + 2\text{Log}\, 2 = -i + i\frac{\pi}{2} - 1 + \log 2$.

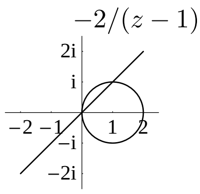
d)





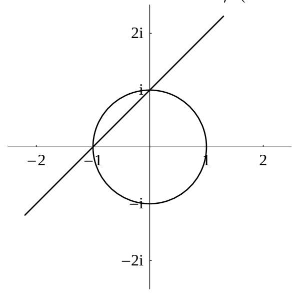
O triângulo com vértices em 0, 1 e i, e a sua translação uma unidade para a esquerda.





Na inversão $w = re^{i\theta} \mapsto \frac{1}{w} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ o módulo da imagem é o inverso do módulo original, enquanto o argumento da imagem é o simétrico do argumento original. A multiplicação por -2 corresponde a uma reflexão na origem e a uma homotetia de razão 2.

$-1-2/(z-1)$



A imagem do triângulo com vértices em 0, 1 e i
por $z \mapsto \frac{1+z}{1-z} = -1 - \frac{2}{z-1}$.

e) $\frac{1+z}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z} = -1 + 2\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2z^k$, para $|z| < 1$.

f) $\frac{1+z}{1-z} = -1 - \frac{2}{z-1} = -1 - \frac{1}{z}\frac{2}{1-1/z} = -1 - \frac{2}{z}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k} = -1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{z^k}$, para $|z| > 1$.

g) $\frac{1+z}{1-z} = \frac{-2}{z-1} - 1$, para $|z-1| < 1$.

2. A equação $r^2 + 8r + 25 = 0$ tem as soluções $-4 \pm 3i$.
A solução geral da equação homogénea $x''+8x'+25x = 0$ é $x = c_1 e^{-4t}\cos(3t) + c_2 e^{-4t}\sin(3t)$, com c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.
Vamos determinar uma solução particular da equação $x'' + 8x' + 25x = 26\cos(3t)$ da forma $x = a\cos(3t) + b\sin(3t)$.
Se $x = a\cos(3t) + b\sin(3t)$, então $x' = -3a\sin(3t) + 3b\cos(3t)$ e $x'' = -9a\cos(3t) - 9b\sin(3t)$.
Substituindo na equação, $-9a\cos(3t) - 9b\sin(3t) - 24a\sin(3t) + 24b\cos(3t) + 25a\cos(3t) + 25b\sin(3t) = 26\cos(3t)$. Igualando os coeficientes de $\cos(3t)$ e $\sin(3t)$,

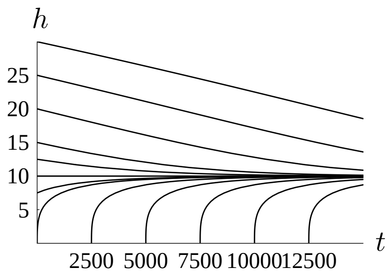
$$\left\{\begin{array}{rcl} 16a + 24b & = & 26 \\ -24a + 16b & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{2}, \\ b = \frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

A solução geral da equação da mola forçada com atrito descrita pela equação do enunciado é $x = c_1 e^{-4t}\cos(3t) + c_2 e^{-4t}\sin(3t) + \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{3}{4}\sin(3t)$, com c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.

3.

a) Seja $V(t)$ o volume de água (medido em metros cúbicos) dentro do cone no instante t. Do enunciado vem que $\frac{dV}{dt} = 1 - 0.1h$.
Por outro lado, o volume de um cone é $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela altura. Como a abertura do cone é 90^o, e por consequência o raio do cone é igual á sua altura, $V = \frac{1}{3}\times\pi h^2 \times h = \frac{\pi}{3}h^3$. Logo, $\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$.
Igualando as duas expressões para $\frac{dV}{dt}$, obtém-se $\pi h^2 \frac{dh}{dt} = 1 - 0.1h$, ou seja, $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$.

b) O declive das soluções ($\frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$) é constante sobre rectas horizontais (h = constante). É positivo se $h < 10$, nulo se $h = 10$ e negativo se $h > 10$.
O declive das soluções tende para $+\infty$ quando $h \to 0$.
O declive das soluções tende para zero se $h \to 10$ ou $h \to +\infty$.
Por outro lado, $\frac{d}{dh}\frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2} = \frac{1}{\pi}\frac{-0.1h^2-(1-0.1h)2h}{h^4} = \frac{1}{\pi}\frac{0.1h(h-20)}{h^4}$; portanto, o declive das soluções é mínimo para $h = 20$. O valor deste mínimo é $-\frac{1}{400\pi}$.



Esboço das soluções de $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$.

c) $h \equiv 10$ é solução da equação diferencial.
As soluções que passam por pontos (t_0, h_0) com $h_0 > 10$ são estritamente decrescentes. Além disso, são limitadas inferiormente pela solução $h \equiv 10$, pois as soluções não se cruzam - há unicidade pelo Teorema de Picard, porque a função $(t, h) \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$ é de classe C^1 no semiplano superior. Portanto as soluções que passam por pontos (t_0, h_0) com $h_0 > 10$ têm limite quando $t \to +\infty$.
Suponhamos que uma destas soluções $\bar{h}$ tem limite $l > 10$. Do estudo da função $\frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$ feito na alínea anterior, concluimos que o declive de $\bar{h}$ é necessariamente inferior a $\max\{\bar{h}'(0), \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1l}{l^2}\}$. Este valor é estritamente menor do que zero. Isto é uma contradição, pois $\bar{h}$ tem uma assímptota horizontal.
As soluções que passam por pontos (t_0, h_0) com $0 < h_0 < 10$ são estritamente crescentes e limitadas superiormente pela solução $h \equiv 10$. Portanto, também elas têm limite $l \leq 10$ quando $t \to +\infty$. O seu declive é necessariamente superior a $\frac{1}{\pi}\frac{1-0.1l}{l^2}$. Logo $l = 10$.

d) Se a altura inicial de água no cone é 50 metros, então, como foi visto na alínea **b)**, a taxa de variação da altura de água no cone é máxima, em valor absoluto, quando a altura de água no cone é 20 metros. Isto corresponde a $\frac{\pi}{3}20^3 = \frac{8000\pi}{3}$ metros cúbicos de água no cone.

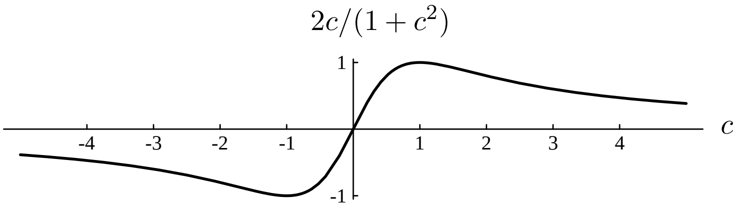
e) Se a altura de água é inferior a 10 metros, então a quantidade de água que entra no cone (1 metro cúbico por segundo) é superior à quantidade de água que sai do cone ($0.1h$ metros cúbicos por segundo) e, portanto,

a altura de água no cone aumenta. Se a altura de água é superior a 10 metros, então a quantidade de água que entra no cone é inferior à quantidade de água que sai do cone e a altura de água no cone diminui. Se a altura de água é igual a 10 metros, então a quantidade de água que entra no cone é igual à quantidade de água que sai do cone e a altura de água no cone mantém-se constante.
Se a altura de água é muito elevada, então a altura de água dentro do cone decresce lentamente, apesar de sair um grande caudal de água do cone, porque a secção do cone aumenta com a altura (raio do cone = altura do cone).
Se a altura de água é próxima de 10 metros, mas diferente de 10 metros, então a altura de água dentro do cone varia lentamente, porque a quantidade de água que sai do cone é próxima da quantidade de água que entra no cone.
Por fim, se inicialmente a altura é nula, então a taxa de variação da altura de água no cone começa por ser muito elevada (é até infinita no instante inicial) porque a secção do cone é muito pequena próximo do vértice.

f) A equação $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$ é separável. $h \equiv 10$ é solução da equação. Se $h(t_0) = h_0 \neq 10$, então h nunca assume o valor 10, devido à unicidade de solução. Nesse caso podemos escrever $\frac{h^2}{1-0.1h}\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}$. Racionalizando a fracção obtém-se $\left(-10h - 100 + \frac{100}{1-0.1h}\right)\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}$. Integrando, $[-5h^2 - 100h - 1000\ln|1-0.1h|] - [-5h_0^2 - 100h_0 - 1000\ln|1-0.1h_0|] = \frac{1}{\pi}(t-t_0)$. Como cada solução não identicamente igual a 10 é sempre superior a 10 ou sempre inferior a 10, podemos escrever $-5(h^2 - h_0^2) - 100(h - h_0) - 1000\ln\frac{1-0.1h}{1-0.1h_0} = \frac{1}{\pi}(t-t_0)$.

4.

a) A equação não permite determinar o declive das soluções que passam pela origem $(x,y) = (0,0)$.
Resolvendo para y', obtém-se $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. O declive das soluções é nulo sobre o eixo dos y's ($x = 0$).
Tirando partido do segundo membro ser uma função homogénea, escrevemos $y' = \frac{2(y/x)}{1+(y/x)^2} = \frac{2c}{1+c^2}$, onde $c = y/x$. Ou seja, o declive das soluções é constante quando c é constante, isto é, sobre rectas que passam pela origem.
Na figura seguinte faz-se um esboço do gráfico da função $c \mapsto \frac{2c}{1+c^2}$:

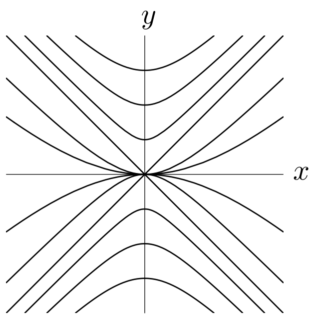


$c \mapsto \frac{2c}{1+c^2}$.

A função y' anula-se sobre os eixos coordenados; tem um máximo absoluto em $x = y$, que vale 1; e tem um mínimo absoluto em $x = -y$, que vale -1.

$y = 0$, $y = x$ e $y = -x$ são soluções da equação diferencial.

Na figura seguinte faz-se um esboço das soluções da equação diferencial:



Esboço das soluções de $2xy - (x^2 + y^2)y' = 0$.

b) A equação é da forma $M + Ny' = 0$, com $M(x, y) = 2xy$ e $N(x, y) = -(x^2 + y^2)$. A equação não é exacta porque $M_y \neq N_x$.

Multiplicando a equação por μ obtém-se $\mu M + \mu N y' = 0$. Para que esta equação seja exacta devemos ter $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, ou seja, $\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$.

Se $\mu = \mu(x)$, então $\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$. No caso presente segue-se que $\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{4x}{-(x^2+y^2)}$. Tal como o primeiro membro, o segundo membro deveria ser apenas função de x. Conclui-se que a equação não admite um factor integrante que seja apenas função de x.

Se $\mu = \mu(y)$, então $\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M}$. No caso presente segue-se que $\frac{\mu_y}{\mu} = -\frac{2}{y}$. Determinemos uma solução desta equação. Como $\ln|\mu| = -2\ln|y| + k$, onde k é constante, podemos tomar $\mu = \frac{1}{y^2}$.

Note-se que $y \equiv 0$ é solução da equação. Da unicidade, garantida pelo Teorema de Picard para $(x, y) \neq (0, 0)$, que é a região onde $(x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2+y^2}$ é de classe C^1, conclui-se que uma solução que passe por (x_0, y_0) com $y_0 \neq 0$ nunca tem ordenada nula, excepto possivelmente se passar pela origem.

A equação $\mu M + \mu N y' = \frac{2x}{y} - \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) y' = 0$ é exacta.

Determinemos ϕ tal que $\frac{d}{dx}\phi(x,y) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}y' = \frac{2x}{y} - \left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)y'$.
Obtém-se $\phi(x,y) = \frac{x^2}{y} - y - c$, com $c \in \mathbb{R}$.
Portanto, $\frac{x^2}{y} - y = c$, com $c \in \mathbb{R}$, são soluções da equação diferencial.
Resolvendo para x em função de y, obtém-se $x = \pm\sqrt{y^2+cy}$.
Resolvendo para y em função de x, obtém-se $y = \frac{-c\pm\sqrt{c^2+4x^2}}{2}$. Note-se que $|c| \leq \sqrt{c^2+4x^2}$. Logo, no semiplano superior $y = \frac{-c+\sqrt{c^2+4x^2}}{2}$, enquanto no semiplano inferior $y = \frac{-c-\sqrt{c^2+4x^2}}{2}$.
Seja $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. O Teorema de Picard garante existência e unicidade de solução local para $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. As soluções são as obtidas acima. Para estudar a unicidade global há que analisar quais as soluções que passam em $(0,0)$.
Pela simetria das soluções, basta considerar o que se passa no primeiro quadrante. Se $x_0 > y_0$, então $\frac{x_0^2}{y_0} - y_0 > 0$, enquanto que se $x_0 < y_0$, então $\frac{x_0^2}{y_0} - y_0 < 0$. Por outro lado, para $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$, o valor de y para $x = 0$ é 0 se $x_0 > y_0$, e é $-\frac{x_0^2}{y_0} + y_0$ se $x_0 < y_0$.
Esta análise conduz aos resultados seguintes, conforme o esboço de soluções:

- Se $|y_0| > |x_0|$, então há apenas uma solução da equação diferencial que passa por (x_0,y_0). O c correspondente é $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$.
- Se $|x_0| \geq |y_0|$, então a equação diferencial tem infinitas soluções que passam no ponto (x_0,y_0). Se $y_0 = 0$, então $y \equiv 0$, para x com o sinal de x_0; podemos considerar que este caso corresponde a $c = \infty$. Se $y_0 \neq 0$, deverá ser $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$ para x com o sinal de x_0. Mas o valor de c não está univocamente determinado para x com sinal contrário ao de x_0.

c) Já vimos na alínea **a)** que $y' = \frac{2v}{1+v^2}$, com $v = \frac{y}{x}$, desde que $x \neq 0$.
Como $y = xv$, temos também $y' = v + xv'$. Logo, $xv' = \frac{2v}{1+v^2} - v = \frac{v(1-v^2)}{1+v^2}$.
$v \equiv 0$, $v \equiv 1$ e $v \equiv -1$ são soluções desta equação.
Para $v \neq 0$, $v \neq 1$, $v \neq -1$ e $x \neq 0$, a equação diferencial para v pode escrever-se $\left(\frac{1}{v-1} + \frac{1}{v+1} - \frac{1}{v}\right)v' = -\frac{1}{x}$. Integrando, $\ln\left|\frac{v^2-1}{v}\right| - \ln\left|\frac{v_0^2-1}{v_0}\right| = -\ln|x| + \ln|x_0|$, para $v_0 \neq 1$, $v_0 \neq -1$ e $v_0 \neq 0$. Então $x\frac{v^2-1}{v} = x_0\frac{v_0^2-1}{v_0}$.
Substituindo $v = y/x$ e $v_0 = y_0/x_0$, vem $y - \frac{x^2}{y} = y_0 - \frac{x_0^2}{y_0}$, para $x_0 \neq y_0$, $x_0 \neq -y_0$ e $y_0 \neq 0$. Esta expressão é também válida para $x_0 = y_0$ e $x_0 = -y_0$, embora a sua dedução não o seja. De facto, se $x_0 = y_0$ ou $x_0 = -y_0$, então $y_0 - \frac{x_0^2}{y_0} = 0$ e a expressão reduz-se a $y - \frac{x^2}{y} = 0$, ou

seja, $x^2 = y^2$.
Confirma-se assim o resultado da alínea anterior.

5. O princípio de máximo (fraco) afirma que nas condições do enunciado $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} \varphi = \max_{\partial\Omega} u$. Vamos fazer a prova deste resultado por contradição.
É óbvio que $\max_{\bar{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u$. Suponhamos que $\max_{\bar{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$, digamos $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u + \delta$, com $\delta > 0$. Seja ϵ tal que $\max_{\partial\Omega} \epsilon||x||^2 < \delta$ e $v = u + \epsilon||x||^2$. Note-se que $\max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \max_{\partial\Omega} \epsilon||x||^2 < \max_{\partial\Omega} u + \delta = \max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} v$ e que $\Delta v = \Delta u + 2n\epsilon \geq 2n\epsilon > 0$.
Se $\bar{x} \in \Omega$ é tal que $v(\bar{x}) = \max_{\bar{\Omega}} v$, tem-se que $\Delta v(\bar{x}) \leq 0$, porque cada uma das derivadas $v_{x_i x_i}(\bar{x}) \leq 0$, $i = 1, 2$. Isto é uma contradição. Portanto $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.