# Análise Matemática IV

2º Exame - 2 de Julho de 96

Fís. e Matem.

**Resolução**

**1.**

**a)** $\gamma\frac{d\gamma}{d\theta} = -gl^3\sin\theta$,
$\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma_0^2}{2} = gl^3\cos\theta - gl^3\cos\theta_0$,
$\gamma^2 = 2gl^3\cos\theta - 2gl^3\cos\theta_0 + \gamma_0^2$,
$$\gamma = \begin{cases} +\sqrt{2gl^3\cos\theta - 2gl^3\cos\theta_0 + \gamma_0^2}\,, & \text{se } \gamma_0 > 0, \\ -\sqrt{2gl^3\cos\theta - 2gl^3\cos\theta_0 + \gamma_0^2}\,, & \text{se } \gamma_0 < 0. \end{cases}$$

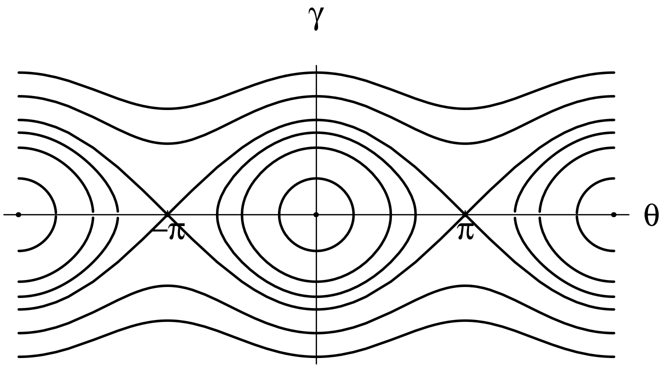
**b)** O Teorema de Picard implica que o sistema tem uma e uma só solução, uma vez que a função $(t,(\theta,\gamma)) \mapsto (\frac{1}{l^2}\gamma, -gl\sin\theta)$ é de classe $C^1$.

**c)** $\frac{d}{dt}H(\theta(t),\gamma(t)) = \frac{\partial H}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial H}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = gl\sin\theta \times \frac{\gamma}{l^2} + \frac{\gamma}{l^2} \times (-gl\sin\theta) = 0$, logo $H(\theta(t),\gamma(t))$ é constante.

**d)** A partir da alínea **a)**, ou a partir da alínea **c)**, $|\gamma| \le \sqrt{4gl^3+\gamma_0^2} \stackrel{\triangle}{=} c$.

**e)** $|\gamma| \le c$ implica $|\dot\theta| \le \frac{c}{l^2}$. Logo, $|\theta(t)| \le \frac{c}{l^2}|t| + \bar c$. Como $|\gamma(t)| \le c$, conclui- -se que $||(\theta,\gamma)||$ não tende para infinito em tempo finito.
Por outro lado, o domínio de $(t,(\theta,\gamma)) \mapsto (\frac{1}{l^2}\gamma, -gl\sin\theta)$ é $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$.
Logo, a solução do sistema está definida em $\mathbb{R}$.

**f)** Considere-se o conjunto $C = \{(\theta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 : H(\theta,\gamma) = H(\theta_0,\gamma_0)\} = \{(\theta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 : \gamma = \pm\sqrt{2}\,l\sqrt{gl\cos\theta + H(\theta_0,\gamma_0)}\,\}$.
$C$ é simétrico em relação ao eixo dos $\theta$'s e em relação ao eixo dos $\gamma$'s.
Se $(\theta,\gamma) \in C$, então $(\theta + 2k\pi, \gamma) \in C$, $k$ inteiro.
$gl\cos\theta + H(\theta_0,\gamma_0) > 0$ sse $\cos\theta > -\frac{1}{gl}H(\theta_0,\gamma_0)$. Note-se que $H(\theta_0,\gamma_0) \ge -gl$.
*i)* Se $H(\theta_0,\gamma_0) > gl$, então $gl\cos\theta + H(\theta_0,\gamma_0) > 0$.
*ii)* Se $H(\theta_0,\gamma_0) = gl$, então $\gamma = \pm\sqrt{2}\,l\sqrt{gl(\cos\theta+1)} = \pm 2g^{\frac{1}{2}}l^{\frac{3}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$.
*iii)* Se $-gl < H(\theta_0,\gamma_0) < gl$, então $gl\cos\theta + H(\theta_0,\gamma_0) \ge 0$ sse $\cos\theta \ge -H(\theta_0,\gamma_0)/gl$.
*iv)* Se $H(\theta_0,\gamma_0) = -gl$, então $gl\cos\theta + H(\theta_0,\gamma_0) \ge 0$ sse $\theta = 2k\pi$, $k$ inteiro.
Por outro lado, o campo vectorial $(\frac{1}{l^2}\gamma, -gl\sin\theta)$ anula-se apenas nos pontos $(k\pi, 0)$, $k$ inteiro. Se $\gamma > 0$, então a primeira componente do campo é positiva, e se $\gamma < 0$, então a primeira componente do campo é negativa.
*Em alternativa,* se $\gamma > 0$, então $\dot\theta > 0$, e se $\gamma < 0$, então $\dot\theta < 0$.
Os pontos de equilíbrio do sistema são $(k\pi, 0)$, $k$ inteiro, e o retrato de fase é:




O retrato de fase do sistema.

**2.**

**a)** $dH = gl\sin\theta\, d\theta + \frac{\gamma}{l^2}\, d\gamma.$
$d\eta = d\gamma \wedge d\theta.$

**b)** $dH(u_1, u_2) = gl\sin\theta\, u_1 + \frac{\gamma}{l^2}\, u_2.$
$d\eta(u, v_H) = d\gamma \wedge d\theta\, ((u_1, u_2), (\frac{1}{l^2}\gamma, -gl\sin\theta)) = \begin{vmatrix} u_2 & u_1 \\ -gl\sin\theta & \frac{\gamma}{l^2} \end{vmatrix} =$
$gl\sin\theta\, u_1 + \frac{\gamma}{l^2}\, u_2.$
$dH(v_H) = d\eta(v_H, v_H) = 0$, porque, sendo $d\eta$ uma forma, $d\eta$ é alternante.

**c)** $\left.\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)}\right|_{t=0} = \frac{\partial(\gamma,\theta)_0}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} = \frac{\partial(\gamma_0,\theta_0)}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} = 1.$
$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_0}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0} - \frac{\partial\gamma}{\partial\theta_0}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_0}\right) = \frac{\partial\dot\gamma}{\partial\gamma_0}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0} + \frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_0}\frac{\partial\dot\theta}{\partial\theta_0} - \frac{\partial\dot\gamma}{\partial\theta_0}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_0} - \frac{\partial\gamma}{\partial\theta_0}\frac{\partial\dot\theta}{\partial\gamma_0} =$
$-gl\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_0}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0} + \frac{1}{l^2}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_0}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta_0} + gl\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_0} - \frac{1}{l^2}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta_0}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_0} = 0.$
Logo, $\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} \equiv 1.$
(No enunciado afirma-se que $(\theta,\gamma)_t$ é $C^1$. As derivadas $\frac{\partial\dot\theta}{\partial\theta_0}$, $\frac{\partial\dot\theta}{\partial\gamma_0}$, $\frac{\partial\dot\gamma}{\partial\theta_0}$ e $\frac{\partial\dot\gamma}{\partial\gamma_0}$ existem e são contínuas, porque $\dot\theta = \frac{\gamma}{l^2}$ e $\dot\gamma = -gl\sin\theta$ e porque $(\theta,\gamma)_t$ é $C^1$. Portanto, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}$, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_0}$, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta_0}$ e $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_0}$ também existem. Além disso, pode-se trocar a ordem das derivadas.)

**d)** Obviamente, a inversa de $(\theta,\gamma)_t$ é $(\theta,\gamma)_{-t}$. Segue-se que $(\theta,\gamma)_t$ é bijectiva.
A inversa é $C^1$, porque $(\theta,\gamma)_t$ é $C^1$, e em particular contínua.
A derivada de $(\theta,\gamma)_t$ é injectiva porque o determinante da derivada é $\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} = 1 \neq 0.$

**e)** $(\theta,\gamma)_t^\star\, d\eta = d\gamma(\theta_0,\gamma_0) \wedge d\theta(\theta_0,\gamma_0) = \frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)}\, d\gamma_0 \wedge d\theta_0 = d\gamma_0 \wedge d\theta_0 = d\eta.$

**f)** $(\theta,\gamma)_t$ é uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^2$. Seja $S$ um conjunto cuja função característica é integrável em $\mathbb{R}^2$. Usando o Teorema de Mudança de Variáveis de Integração, a Área de $S = \iint_S d\theta d\gamma =$

$\iint_{(\theta,\gamma)_{-t}(S)} \left|\frac{\partial(\theta,\gamma)}{\partial(\theta_0,\gamma_0)}\right| d\theta_0 d\gamma_0 = \iint_{(\theta,\gamma)_{-t}(S)} d\theta_0 d\gamma_0 =$ Área de $(\theta,\gamma)_{-t}(S)$.
*Em alternativa,* a Área de $S = \iint_S d\theta \wedge d\gamma = \iint_{(\theta,\gamma)_{-t}(S)} (\theta,\gamma)_t^\star\, d\theta \wedge d\gamma =$ $\iint_{(\theta,\gamma)_{-t}(S)} d\theta_0 \wedge d\gamma_0 =$ Área de $(\theta,\gamma)_{-t}(S)$.

**g)** $\int_{(\theta,\gamma)_t(\partial\Omega)} \eta = \int_{\partial\Omega} (\theta,\gamma)_t^\star\, \eta = \int_\Omega d(\theta,\gamma)_t^\star\, \eta = \int_\Omega (\theta,\gamma)_t^\star\, d\eta = \int_\Omega d\eta = \int_{\partial\Omega} \eta.$