Análise Matemática IV

2º Exame - 19 de Janeiro de 2007

LEBM, LEC, LEFT, LEGM e LMAC

Resolução

1. A função f é diferenciável como função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Logo, a função f será diferenciável nos pontos em que satisfizer a equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$. Tem-se $f_x = 1 + 2ix$ e $f_y = i \Rightarrow -if_y = 1$. Conclui-se que f é diferenciável nos pontos $x + iy$ tais que $x = 0$, ou seja no eixo imaginário. A derivada é $f'(iy) = f_x(iy) = 1$.

2. Se f é diferenciável, então satisfaz a equação de Cauchy-Riemann $f_x = -if_y$. Como $f_x = u_x + iv_x$ e $-if_y = -iu_y + v_y$, tira-se $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Além disso, $f' = f_x$. Logo,

$$JF = \det DF = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f_x|^2 = |f'|^2.$$

Sendo S compacto e F contínua, $F(S)$ é compacto e portanto mensurável. Usando a fórmula de mudança de variáveis de integração, $\iint_{F(S)} du\,dv = \iint_S |\det DF|\,dx\,dy = \iint_S |f'|^2\,dx\,dy$.

3.

a) Como f é inteira, para todo o $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \ldots.$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por $(z-a)^n$,

$$\begin{aligned} g(z) \quad = \quad & \underbrace{\tfrac{f(a)}{(z-a)^n} + \tfrac{f'(a)}{(z-a)^{n-1}} + \tfrac{f''(a)/2!}{(z-a)^{n-2}} + \ldots + \tfrac{f^{(n-2)}(a)/(n-2)!}{(z-a)^2}}_{g_1(z)} \\ & + \underbrace{\tfrac{f^{(n-1)}(a)/(n-1)!}{(z-a)}}_{g_2(z)} \\ & + \underbrace{\tfrac{f^{(n)}(a)}{n!} + \tfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \tfrac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(z-a)^2 + \ldots}_{g_3(z)}, \end{aligned}$$

para todo o $z \neq a$.

b) Seja

$$G_1(z) = -\tfrac{f(a)/(n-1)}{(z-a)^{n-1}} - \tfrac{f'(a)/(n-2)}{(z-a)^{n-2}} - \tfrac{f''(a)/((n-3)2!)}{(z-a)^{n-3}} - \ldots - \tfrac{f^{(n-2)}(a)/(n-2)!}{(z-a)}.$$

Então $G_1'(z) = g_1(z)$, pelo que g_1 é a derivada de uma função holomorfa e $\int_{|z-a|=r} g_1(z)\,dz = 0$. Como g_3 é inteira, pelo Teorema de Cauchy, também $\int_{|z-a|=r} g_3(z)\,dz = 0$. Finalmente, por cálculo directo, $\int_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i$. Combinando estes resultados,

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz = \int_{|z-a|=r} [g_1(z) + g_2(z) + g_3(z)]\,dz = 2\pi i \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

4.

Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-ia, ia\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} = \frac{z^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}$. Tem-se,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-ia)^2}, \text{ com } g(z) = \frac{z^2}{(z+ia)^2}.$$

A função g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-ia\}$. Seja $R > a$ e $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \wedge |z| \leq R\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0 \wedge |z| = R\}$. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-ia)^2}\,dz = 2\pi i g'(ia) = 2\pi i \left[\frac{2iaz(z+ia)}{(z+ia)^4}\right]_{z=ia} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{2^2 i^3 a^3}{2^4 a^4} = \frac{\pi}{2a}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\pi}{2a} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{|z|=R \wedge \Im z > 0} f(z)\,dz. \quad (*)$$

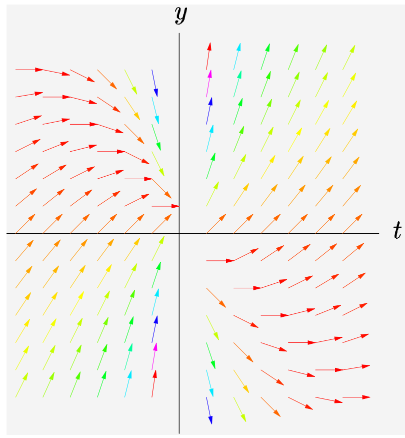
O cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando $R \to +\infty$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\,dz\right| &\leq \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} \frac{R^2}{(R^2-a^2)^2}|dz| \\ &= \frac{\pi R^3}{(R^2-a^2)^2} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty.\end{aligned}$$

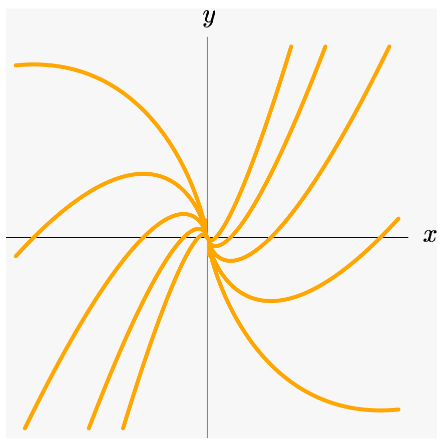
Tomando o limite em ambos os membros de $(*)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$.

5.

a) $y' = 1 + \frac{y}{x} = 1 + m$, com $m = \frac{y}{x}$. Note-se, por exemplo, que $m = 0 \Rightarrow y' = 1$, $m = 1 \Rightarrow y' = 2$, $m = -1 \Rightarrow y' = 0$, $m = \infty \Rightarrow y' = \infty$, e $y' = 1 + m = m \Rightarrow m = \infty$.



Campo de direcções de $y' = 1 + y/x$.



Esboço dos gráficos das soluções de $y' = 1 + y/x$.

b) As soluções são decrescentes quando

$$y' < 0 \Leftrightarrow m < -1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} < -1 \Leftrightarrow (y < -x \wedge x > 0 \text{ ou } y > -x \wedge x < 0),$$

e são crescentes quando

$$y' > 0 \Leftrightarrow m > -1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} > -1 \Leftrightarrow (y > -x \wedge x > 0 \text{ ou } y < -x \wedge x < 0).$$

Têm pontos de estacionaridade em

$$y' = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Leftrightarrow y = -x,$$

sendo que os máximos ocorrem em $y=-x$ e $x<0$, e os mínimos em $y=-x$ e $x>0$.

c) Um factor integrante é $e^{\int(-1/x)\,dx}=e^{-\log|x|}=\frac{1}{|x|}$, pelo que $1/x$ é também factor integrante. Multiplicando a ambos os membros da equação por este factor integrante obtém-se

$$\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}=\frac{1}{x}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x}.$$

Integrando de x_0 a x, vem

$$\frac{y(x)}{x}-\frac{y(x_0)}{x_0}=\log|x|-\log|x_0|\quad\Leftrightarrow\quad y(x)=y_0\frac{x}{x_0}+x\log\left|\frac{x}{x_0}\right|.$$

uma vez que $y(x_0)=y_0$. Na realidade podemos escrever $y(x)=y_0\frac{x}{x_0}+x\log\left(\frac{x}{x_0}\right)$ porque as soluções com $x_0>0$ estão definidas para $x>0$, e as soluções com $x_0<0$ estão definidas para $x<0$.

d)

$$\lim_{x\to 0}y(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log(x/x_0)}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{x_0/x\times 1/x_0}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0}x=0$$

e

$$\lim_{x\to 0}y'(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{y_0}{x_0}+\log\left(\frac{x}{x_0}\right)+1\right]=-\infty.$$

6.

a) A matriz $A^T=J=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, J em forma canónica de Jordan. Usando a definição de exponencial,

$$\begin{aligned}e^{At}&=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\ldots=I+J^Tt+\frac{1}{2!}(J^T)^2t^2+\ldots\\&=I+J^Tt+\frac{1}{2!}(J^2)^Tt^2+\ldots=\left(I+Jt+\frac{1}{2!}J^2t^2+\ldots\right)^T\\&=\left(e^{Jt}\right)^T=\begin{bmatrix}e^t&te^t\\0&e^t\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&0\\t&1\end{bmatrix}e^t.\end{aligned}$$

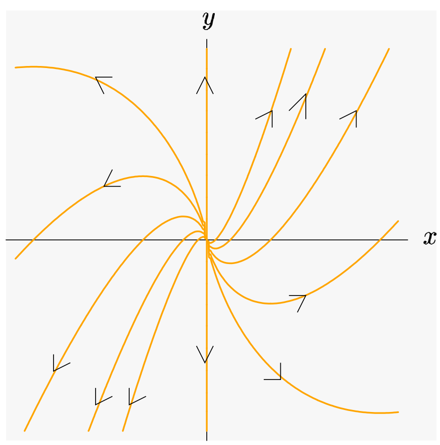
A solução do sistema é

$$X(t)=e^{At}X(0)=\begin{bmatrix}x_0\\x_0t+y_0\end{bmatrix}e^t.$$

b) Pela derivada da função composta,

$$\frac{d}{dx}[y(t(x))] = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Portanto os gráficos das soluções da equação diferencial correspondem a trajectórias do retrato de fase do sistema. Há no entanto que juntar as trajectórias $X(t) = [0\ y_0]^T e^t$, correspondentes justamente ao fluxo ao longo da única direcção própria, que não correspondem a gráficos de funções de x. Para determinar o sentido em que as trajectórias são descritas podemos observar que na direcção do vector próprio, $[0\ 1]^T$, o fluxo afasta-se da origem já que o valor próprio associado é 1. Ao longo das outras trajectórias os sentidos podem ser determinados por continuidade. *Em alternativa,* se x é positivo, então x' é positivo, pelo que x é crescente; se x é negativo, então x' é negativo, pelo que x é decrescente.



O retrato de fase do sistema.

7. Designando por D o operador de derivação,

$$\begin{aligned} y'' - y = -4e^{-t} \quad &\Leftrightarrow \quad (D^2-1)y = -4e^{-t} \Leftrightarrow (D-1)(D+1)y = -4e^{-t} \\ &\Rightarrow \quad (D-1)(D+1)^2 y = 0 \Leftrightarrow y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação original obtém-se,

$$(c_3 t e^{-t})'' - c_3 t e^{-t} = -4e^{-t} \Leftrightarrow -2c_3 e^{-t} = -4e^{-t} \Leftrightarrow c_3 = 2.$$

A solução geral da equação dada é

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 2te^{-t}.$$

8.

a) Como f é seccionalmente C^1, para todos os pontos de continuidade, ou seja $x \notin \{-\pi/3, \pi/3\}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right],$$

com

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Como f é par todos os b_n's são nulos e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \cos(nx)\, dx = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{se } n = 0, \\ \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & \text{se } n \neq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n = 3k+3, \\ +\frac{\sqrt{3}}{n\pi} & \text{se } n = 6k+1 \text{ ou } n = 6k+2, \\ -\frac{\sqrt{3}}{n\pi} & \text{se } n = 6k+4 \text{ ou } n = 6k+5, \end{cases} \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{N}_0$. Assim,

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{1}{5}\cos(5x) + \ldots\right]. \quad (*)$$

b) O ponto π é um ponto de continuidade (da extensão periódica) de f, pelo que podemos tomar $x = \pi$ na igualdade $(*)$. Obtém-se

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Nota: Para calcular a soma no enunciado também se podia escolher o ponto $x = \pi/3$, caso em que a soma da série de Fourier vale $1/2$ (média dos limites laterais de f nesse ponto).