

Análise Matemática IV  
 2º Exame - 19 de Janeiro de 2006  
 LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

**Resolução**

**1.**

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 4y = e^{2t} &\Leftrightarrow (D - 2)^2 y = e^{2t} \Rightarrow (D - 2)^3 y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 t^2 e^{2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Substituindo estas funções na equação original obtém-se

$$(2c_3 e^{2t} + 8c_3 t e^{2t} + 4c_3 t^2 e^{2t}) - 4(2c_3 t e^{2t} + 2c_3 t^2 e^{2t}) + 4(c_3 t^2 e^{2t}) = e^{2t},$$

ou seja,  $c_3 = 1/2$ . Concluímos que as soluções da equação dada são

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{t^2}{2} e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**2.** Vamos procurar soluções de  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  da forma  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Substituindo na equação diferencial,  $XT'' = c^2 X''T$ , ou  $\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$ . Conclui-se que ambos os membros da última igualdade são uma mesma constante, constante essa que designaremos por  $-\lambda$ . Tem-se  $X'' + \lambda X = 0$  e  $T'' = -\lambda c^2 T$ . Das condições fronteira para  $u$ , vem  $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$  e  $u(\pi, t) = X(\pi)T(t) = 0$ . Uma vez que não queremos  $T(t) \equiv 0$  (porque isso conduziria a  $u(x, t) \equiv 0$ ), tiramos  $X(0) = X(\pi) = 0$ . As soluções não nulas de

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \text{ em } ]0, \pi[, \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases}$$

podem ser indexadas em  $n \in \mathbb{N}_1$ :

$$\begin{cases} \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{\pi^2} = n^2, \\ X_n(x) = c_n \sin(nx), \end{cases}$$

onde os  $c_n$ 's são constantes. Agora a equação  $T'' = -n^2 c^2 T$ , conduz a  $T(t) = d_n \cos(nct) + e_n \sin(nct)$ , onde os  $d_n$ 's e os  $e_n$ 's são constantes. Fazendo o produto de  $X_n$  por  $T_n$ , obtém-se

$$u_n(x, t) = \sin(nx)[a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)],$$

com  $a_n = c_n d_n$  e  $b_n = c_n e_n$ . Cada uma destas funções  $u_n$  satisfaz a equação diferencial com as condições fronteiras impostas, logo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx)[a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)]$$

é também uma solução formal da equação diferencial com as condições fronteiras impostas. Para satisfazer as condições iniciais vamos impor que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx) = \sin(x),$$

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n n c \sin(nx) = \sin(2x),$$

Pelo facto de as funções  $x \mapsto \sin(nx)$  serem ortogonais em  $L^2(0, \pi)$ , tira-se que  $a_1 = 1$ ,  $b_2 = 1/(2c)$ , sendo todos os restantes  $a_n$ 's e  $b_n$ 's nulos. Substituindo na expressão para  $u(x, t)$ ,

$$u(x, t) = \sin(x) \cos(ct) + \frac{1}{2c} \sin(2x) \sin(2ct)$$

Verifica-se facilmente que esta é uma solução da equação diferencial com as condições fronteira e iniciais dadas. Foi provado nas aulas que o problema posto tem uma única solução usando o método da energia.

**3.** Consideremos a extensão par,  $\bar{f}$ , de  $f$  ao intervalo  $[-2, 2]$ . Sabemos que

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \right],$$

com

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \bar{f}(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \bar{f}(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx.$$

Sendo a função  $\bar{f}$  par, todos os  $b_n$ 's são nulos e

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 \bar{f}(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{2}{n\pi} \left[ \sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}(-1)^{(n+1)/2} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par não nulo.} \end{cases} \end{aligned}$$

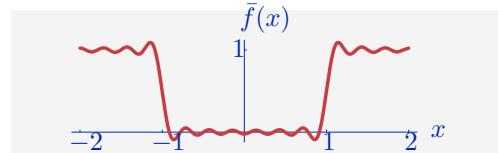
O valor de  $a_0$  é

$$a_0 = \int_1^2 1 dx = 1.$$

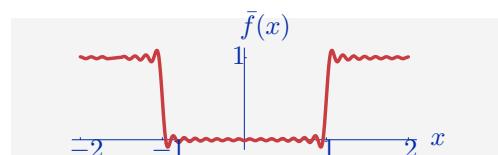
Para  $|x| \leq 2$  e  $x \neq \pm 1$ ,

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos(\pi x/2)}{1} - \frac{\cos(3\pi x/2)}{3} + \frac{\cos(5\pi x/2)}{5} - \dots \right],$$

onde a série do segundo membro converge pontualmente. Para  $x = \pm 1$ , a soma da série vale  $1/2$  enquanto  $\bar{f}(\pm 1) = 1$ . Restringindo  $x$  ao intervalo  $[0, 2]$  obtém-se a série de cosenos de  $f$ .



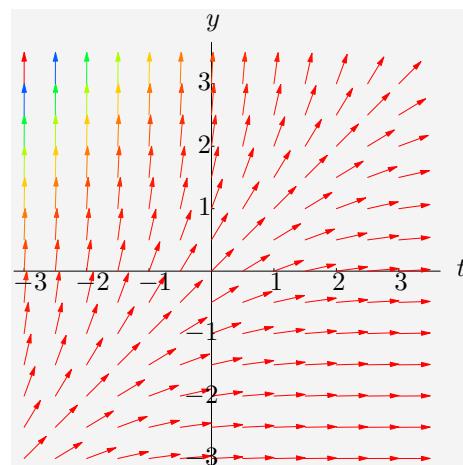
Esboço do gráfico de  $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^7 (-1)^{k-1} \frac{\cos[\frac{(2k-1)\pi x}{2}]}{2k-1}$ .



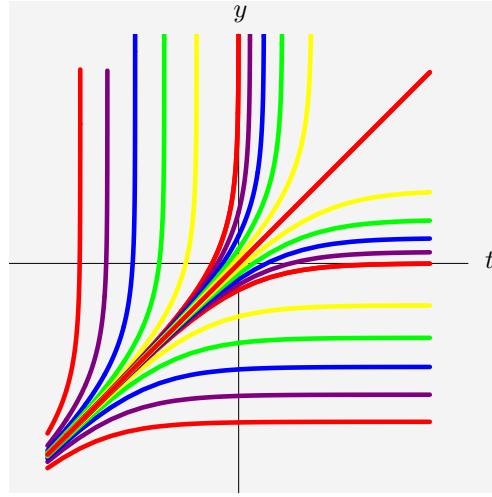
Esboço do gráfico de  $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{15} (-1)^{k-1} \frac{\cos[\frac{(2k-1)\pi x}{2}]}{2k-1}$ .

4.

a)



Campo de direcções de  $y' = e^{y-t}$ .



Esboço dos gráficos das soluções de  $y' = e^{y-t}$ .

- b) A equação é separável:

$$e^{-y}y' = e^{-t}.$$

Integrandos ambos os membros entre  $t_0$  e  $t$ ,

$$e^{-y(t)} - e^{-y(t_0)} = e^{-t} - e^{-t_0} \Leftrightarrow y(t) = -\log(e^{-y_0} + e^{-t} - e^{-t_0}).$$

- c) Fazendo  $t_0 = 0$  na expressão obtida na alínea b), obtém-se  $y(t) = -\log(e^{-y_0} + e^{-t} - 1)$ . Como se está a supor que  $y_0 < 0$ , tem-se  $e^{-y_0} - 1 > 0$ , pelo que a solução está definida em  $\mathbb{R}$ . Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = -\log(e^{-y_0} - 1).$$

O gráfico tem como assímpota o eixo dos  $t$ 's se este limite for nulo. Isto corresponde a

$$-\log(e^{-y_0} - 1) = 0 \Leftrightarrow e^{-y_0} = 2 \Leftrightarrow y_0 = \log \frac{1}{2}.$$

- d) Fazendo  $y_0 = 0$  na expressão obtida na alínea b), obtém-se

$$y(t) = -\log(e^{-t} - e^{-t_0} + 1).$$

Esta solução existe para

$$e^{-t} - e^{-t_0} + 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-t} > e^{-t_0} - 1 \Leftrightarrow t < -\log(e^{-t_0} - 1).$$

O intervalo máximo de existência da solução é  $]-\infty, -\log(e^{-t_0} - 1)[$ .

**Observação:** A última figura acima é simétrica em relação à recta

$y = t$ . Mais precisamente, seja  $c < 0$ ; se os valores  $y_0$  da alínea c) e  $t_0$  da alínea d) satisfazem  $y_0 = c = t_0$ , então os gráficos das soluções correspondentes podem ser obtidos um do outro por reflexão na recta  $y = t$ . Isto é consequência da simetria da equação diferencial:  $e^{-y} dy = e^{-t} dt$ . É por isso claro que se na alínea c) obtivémos o valor  $-\log(e^{-y_0} - 1)$ , na alínea d) tínhamos que obter o valor  $-\log(e^{-t_0} - 1)$ .

5. Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por

$$f(z) = \bar{z}^2 = (x - iy)^2 = (x^2 - y^2) - 2ixy.$$

Então  $f_x(z) = 2x - 2iy$  e  $-if_y(z) = -i(-2y - 2ix) = -2x + 2iy$ . A equação de Cauchy-Riemann,  $f_x = -if_y$ , é satisfeita para  $2x = -2x \wedge -2y = 2y$ , ou seja apenas no ponto  $z = 0$ . Portanto,  $f$  apenas pode ser diferenciável na origem. Como  $f$  tem derivadas parciais contínuas,  $f$  é de facto diferenciável em zero e  $f'(0) = f_x(0) = 0$ .

6. 1ª resolução. Seja  $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$ , para  $r > 0$  e  $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Então  $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$  para  $z$  não pertencente à parte positiva do eixo imaginário união com zero. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \log 1 - \log(-1) = -\log(1e^{-i\pi}) = i\pi.$$

2ª resolução. Como  $z \mapsto \frac{1}{z}$  é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , o Teorema de Cauchy aplicado à região  $\mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}_0^+\}$  garante que podemos substituir o arco  $\gamma$  pela semi-circunferência de raio 1 centrada na origem no semiplano  $\Im z \leq 0$ . Esta semi-circunferência pode ser parametrizada por  $e^{i\theta}$  com  $\theta \in [-\pi, 0]$ . Por cálculo directo,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = i\pi.$$

7. Sabemos que

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

para  $z \in \mathbb{C}$ , logo

$$\frac{\sin z - z}{z^6} = -\frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z} - \frac{z^3}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-5}}{(2n+1)!}$$

para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Logo, zero é um pólo de ordem 3 da função com resíduo  $1/5!$ . A função não tem nenhuma outra singularidade para além de zero.

8. Seja  $f : \mathbb{C} \setminus \{-i, i\} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$ . Tem-se,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2}, \text{ com } g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}.$$

A função  $g$  é holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ . Seja  $R > 1$  e  $\gamma$  um contorno fechado formado pela união do segmento de recta que une  $-R$  e  $R$  com a semi-circunferência centrada na origem no semiplano superior, descrita no sentido directo. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-i)^2} dz = 2\pi i g'(i) = 2\pi i \left[ -\frac{2}{(z+i)^3} \right]_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Logo,

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{|z|=R \wedge \Im z > 0} f(z) dz. \quad (*)$$

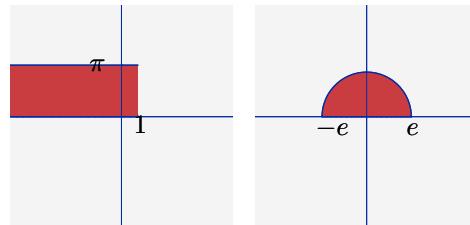
O cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando  $R \rightarrow +\infty$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|=R \wedge \Im z > 0} f(z) dz \right| &\leq \int_{|z|=R \wedge \Im z > 0} \frac{1}{(R^2-1)^2} |dz| \\ &= \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \rightarrow 0 \text{ quando } R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os membros de  $(*)$  quando  $R \rightarrow +\infty$ , conclui-se que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$ .

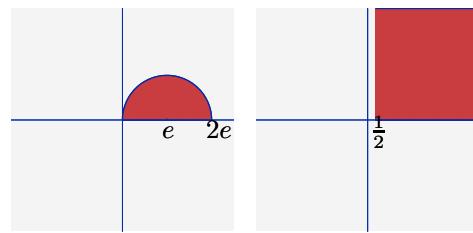
9.

a)

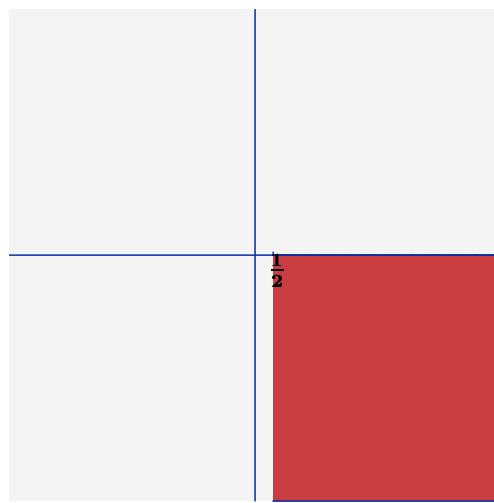


Os planos  $z$  e  $e^z$ .

b)



Os planos  $e^z + e$  e  $\overline{\frac{e}{e^z + e}}$ .



O plano  $\frac{e}{e^z + e}$ .