Análise Matemática IV

Exame de 2ª Época - 17 de Julho de 97
Civ., Fís. e Matem.

Duração: 3 horas
Apresente os cálculos

1. Considere a função $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$.

a) Classifique as singularidades da n-ésima potência da função. (1)

b) Calcule o integral da n-ésima potência da função ao longo de $|z-1| = 1$. (2)

c) Calcule o integral da função ao longo do segmento que vai de -1 a i. (1)

d) Calcule a imagem pela função do triângulo com vértices em 0, 1 e i. (1.5)

e) Calcule o desenvolvimento da função em série de potências de z, para $|z| < 1$. (0.5)

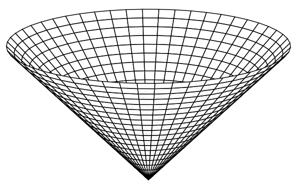
f) Calcule o desenvolvimento da função em série de potências de z, para $|z| > 1$. (0.5)

g) Calcule o desenvolvimento da função em série de potências de $z - 1$, para $|z - 1| < 1$. (0.5)

2. Determine a solução geral da equação da mola forçada com atrito, com constante de restituição 25 e coeficiente de atrito 8, descrita pela equação (2)

$$x'' + 8x' + 25x = 26\cos(3t).$$

3. Considere o cone com uma abertura de 90^o representado na figura.



Cone.

Suponha que se deita água para dentro do cone a uma taxa de 1 metro cúbico por segundo. Designe por $h(t)$ a altura de água no cone no instante t. Suponha ainda que a água se escoa pelo vértice do cone a uma taxa proporcional à altura de água no cone, sendo a constante de proporcionalidade 0.1 .

a) Mostre que a equação diferencial para h é $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$. (1)

b) Esboce o campo de direcções e as soluções da equação da alínea anterior. Considere apenas t e h positivos. (1)

c) Qual o limite das soluções quando $t \to +\infty$? Prove rigorosamente a resposta sem resolver a equação diferencial. (0.5)

d) Suponha que a altura inicial de água no cone é superior a 50 metros. Para que quantidade de água no cone é máxima, em valor absoluto, a taxa de variação da altura de água no cone? (0.5)

e) Interprete fisicamente o comportamento das soluções, analisando o sentido de variação da altura de água no cone, e a evolução da taxa de variação da altura de água no cone no tempo. (0.5)

f) Resolva a equação diferencial da alínea **a)**. (1)

4. Considere a equação diferencial $2xy - (x^2 + y^2)y' = 0$.

a) Esboce o seu campo de direcções e esboce as soluções. (1.5)

b) Determine um factor integrante que a transforme numa equação exacta e resolva-a. (1.5)

c) Resolva a equação diferencial usando o facto de ser homogénea, ou seja, determine uma equação diferencial para $v := \frac{y}{x}$, resolva-a e confirme o resultado obtido na alínea anterior. (1.5)

5. Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^2$. Enuncie e prove o princípio de máximo para a equação (2)

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$.