Análise Matemática IV

2º Exame - 2 de Julho de 96

Fís. e Matem.

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Sejam g e $l \in \mathbb{R}^+$.

a) Determine a solução da equação $\frac{d\gamma}{d\theta} = -gl^3 \frac{\sin\theta}{\gamma}$ que verifica a condição inicial $\gamma(\theta_0) = \gamma_0$, com $\gamma_0 \neq 0$. (2)

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \frac{1}{l^2}\gamma, \\ \dot{\gamma} &= -gl\sin\theta, \end{cases}$$

com condição inicial $(\theta(0), \gamma(0)) = (\theta_0, \gamma_0) \in \mathbb{R}^2$.

b) O sistema tem uma e uma só solução. Justifique. (1.5)

Seja $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $H(\theta, \gamma) = \frac{1}{2l^2}\gamma^2 - gl\cos\theta$.

c) Verifique que H é constante ao longo da solução do sistema. (1.5)

d) Mostre que existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\gamma(t)| \leq c$, para todo o $t \in \mathbb{R}$. (1.5)

e) A solução do sistema está definida em $\mathbb{R}$. Justifique. Sugestão: Basta provar que $||(\theta, \gamma)||$ não tende para infinito em tempo finito. (1.5)

f) Esboce o retrato de fase do sistema. Sugestão: Use a alínea **c)**. (2)

2. Sejam g e $l \in \mathbb{R}^+$. Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $H(\theta, \gamma) = \frac{1}{2l^2}\gamma^2 - gl\cos\theta$, e η a forma-1 definida por $\eta(\theta, \gamma) = \gamma\, d\theta$.

***a)** Calcule dH e $d\eta$. (2)

Seja $u \in \mathbb{R}^2$ e $v_H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $v_H(\theta, \gamma) = (\frac{1}{l^2}\gamma, -gl\sin\theta)$.

***b)** Verifique que $dH(u) = d\eta(u, v_H)$. (2)
Verifique que $dH(v_H) = 0$.

Considere o sistema $\frac{d}{dt}(\theta, \gamma) = v_H(\theta, \gamma)$, ou seja,

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \frac{1}{l^2}\gamma, \\ \dot{\gamma} &= -gl\sin\theta, \end{cases}$$

com condição inicial $(\theta(0), \gamma(0)) = (\theta_0, \gamma_0) \in \mathbb{R}^2$. O sistema tem uma e uma só solução, e a solução está definida em $\mathbb{R}$. Designe-se a solução do sistema no instante t por $[\theta(\theta_0, \gamma_0)(t), \gamma(\theta_0, \gamma_0)(t)]$. Para $t \in \mathbb{R}$, fixo mas arbitrário, designe- -se também por $(\theta, \gamma)_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função $(\theta_0, \gamma_0) \mapsto [\theta(\theta_0, \gamma_0)(t), \gamma(\theta_0, \gamma_0)(t)]$. Pode-se provar que $(\theta, \gamma)_t$ é de classe C^1.

c) Verifique que $\left.\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)}\right|_{t=0} = 1$ e $\frac{d}{dt}\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} \equiv 0$. Logo, $\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} \equiv 1$. (1.5)

d) A função $(\theta,\gamma)_t$ é bijectiva, tem derivada injectiva e tem inversa contínua. Justifique. (1)

Portanto, a função $(\theta,\gamma)_t$ é uma parametrização de $\mathbb{R}^2$.

*__e)__ Verifique que $(\theta,\gamma)_t^\star\, d\eta = d\eta$. Sugestão: Use a alínea **c)**. (1)

f) A função $(\theta,\gamma)_t$ preserva áreas. Justifique. (1)

Seja Ω um domínio regular em $\mathbb{R}^2$.

*__g)__ Usando o Teorema de Stokes, verifique que $\int_{(\theta,\gamma)_t(\partial\Omega)} \eta = \int_{\partial\Omega} \eta$. (1.5)