Análise Matemática IV

2º Exame - 19 de Janeiro de 2007

LEBM, LEC, LEFT, LEGM e LMAC

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por (1)

$$f(x+iy) = x + i(y+x^2)$$

e calcule a sua derivada quando existir.

2. Seja $f : \mathbb{C} :\to \mathbb{C}$, (2)

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

uma função inteira e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o campo vectorial associado a f:

$$F(x,y) = (u(x,y), v(x,y)).$$

Relacione o Jacobiano de F com a derivada de f. Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto onde F é injectiva. Escreva $\iint_{F(S)} du\, dv$ nas variáveis x e y.

3. Seja f inteira, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

a) Calcule o desenvolvimento em série de Laurent de $z \mapsto g(z) := \frac{f(z)}{(z-a)^n}$ em torno de a. (1)

b) Sem usar a fórmula integral de Cauchy, a partir do resultado da alínea anterior calcule $\int_{|z-a|=r} g(z)\, dz$. Justifique. (2)

4. Seja $a > 0$. Calcule justificando e usando integrais de contorno (2.5)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\, dx.$$

5. Considere a equação diferencial linear ordinária de 1ª ordem

$$y' - \frac{y}{x} = 1.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (1)

b) Em que regiões do plano são (de)crescentes as soluções? Onde ocorrem os mínimos e os máximos? (1)

c) Determine analiticamente a solução que satisfaz $y(x_0) = y_0$, onde $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (1)

d) Calcule $\lim_{x\to 0} y(x)$ e $\lim_{x\to 0} y'(x)$. (1)

6. Considere o sistema

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule e^{At} e a solução do sistema. (2)

b) Se $x'(t) \neq 0$, então a função $t \mapsto x(t)$ admite inversa local $x \mapsto t(x)$. Mostre que $\frac{d}{dx}[y(t(x))] = 1 + \frac{y}{x}$. Trace o retrato de fase do sistema. Justifique. (1)

7. Determine a solução geral de (2)

$$y'' - y = -4e^{-t}.$$

8. Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Calcule a série de Fourier de f. Indique os cinco primeiros termos não nulos da série apresentando o resultado de forma simplificada. (2)

b) Calcule (0.5)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots.$$