Análise Matemática IV

2º Exame - 19 de Janeiro de 2006

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Resolva a equação diferencial $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$. (1)

2. Seja $c > 0$. Determine a solução de (3)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{em }]0,\pi[\times]0,+\infty[, \\ u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = 0 \quad \text{para } t > 0, \\ u(x,0) = \sin(x), \ u_t(x,0) = \sin(2x) \quad \text{para } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

3. Determine a série de cosenos de $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, definida por (2)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

4. Considere a equação diferencial

$$y' = e^{y-t}.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das suas soluções. (2)

b) Determine analiticamente a solução com condição inicial $y(t_0) = y_0$. (1)

c) Suponha que $t_0 = 0$ e $y_0 < 0$. Para que valor de y_0 o gráfico da solução tem como assímptota o eixo dos t's? (1)

d) Suponha que $t_0 < 0$ e $y_0 = 0$. Determine o intervalo máximo de existência da solução. (1)

5. Estude a diferenciabilidade da função $z \mapsto \overline{z}^2$ e calcule a sua derivada quando existir. (1)

6. Calcule $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$, onde γ é o arco $\{(t, t^2-1), \ -1 \le t \le 1\}$ percorrido de -1 a 1. *Sugestão:* Use o Teorema Fundamental do Cálculo, ou em alternativa use o Teorema de Cauchy e substitua a curva dada por outra que conduza a cálculos mais simples. (2)

7. Calcule o desenvolvimento em série de Laurent em torno do ponto zero de $z \mapsto \frac{\sin z - z}{z^6}$, indicando a região onde é válido. Classifique as singularidades e calcule os resíduos da função. (2)

8. Calcule usando integrais de contorno $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$. (2)

9. Considere a região $S = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 1 \text{ e } 0 < \Im z < \pi\}$.

a) Calcule geometricamente a imagem de S por $z \mapsto e^z$. (1)

b) Calcule geometricamente a imagem de S por $z \mapsto \frac{e}{e^z + e}$. (1)