Análise Matemática IV

1º Exame - 19 de Junho de 97

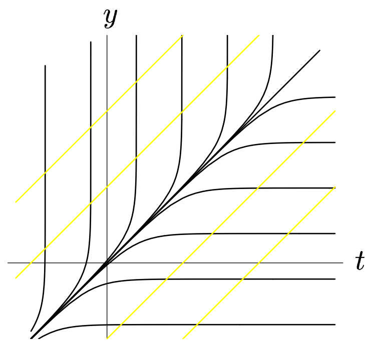
Civ., Fís. e Matem.

Resolução

1.

a) Se $y - t = b$, então $y' = e^b$. Por exemplo,

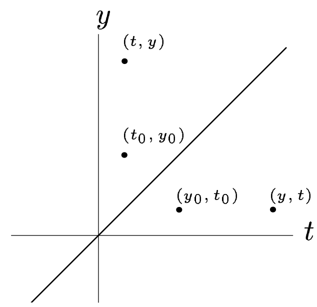
$$\begin{array}{lll} y - t = -2 & \Rightarrow & y' = e^{-2}, \\ y - t = -1 & \Rightarrow & y' = e^{-1}, \\ y - t = 0 & \Rightarrow & y' = 1, \\ y - t = 1 & \Rightarrow & y' = e, \\ y - t = 2 & \Rightarrow & y' = e^2. \end{array}$$



Campo de direcções e esboço das soluções.

b) De $y' = e^{y-t}$ tira-se, sucessivamente,
$e^{-y}y' = e^{-t}$,
$\frac{d}{dt}e^{-y} = \frac{d}{dt}e^{-t}$,
$e^{-y(t)} - e^{-y(t_0)} = e^{-t} - e^{-t_0}$,
$e^{-y} - e^{-y_0} = e^{-t} - e^{-t_0}$,
$y = -\ln(e^{-t} - e^{-t_0} + e^{-y_0})$.
A solução que verifica $y(t_0) = y_0$ existe enquanto $e^{-t} - e^{-t_0} + e^{-y_0} > 0$.
Se $t_0 > y_0$, então $e^{-t_0} - e^{-y_0} < 0$; a solução está globalmente definida.
Se $t_0 < y_0$, então $e^{-t_0} - e^{-y_0} > 0$; a solução existe para $t < -\ln(e^{-t_0} - e^{-y_0})$.
Se $y_0 = t_0$, então a solução é a recta $y = -\ln e^{-t} = t$.

c) A reflexão de (t, y) na recta $y = t$ é o ponto (y, t).



Reflexão de pontos na recta $y = t$.

- *1º Método:* Um ponto (t, y) pertence à solução que passa por (t_0, y_0) sse $e^{-y} - e^{-y_0} = e^{-t} - e^{-t_0}$. Um ponto $(\bar{t}, \bar{y})$ pertence à solução que passa por (y_0, t_0) sse $e^{-\bar{y}} - e^{-t_0} = e^{-\bar{t}} - e^{-y_0}$, ou seja, sse $(\bar{y}, \bar{t})$ pertence à solucão que passa por (t_0, y_0). Ou seja, um ponto $(\bar{t}, \bar{y})$ pertence à solução que passa por (y_0, t_0) sse o ponto simétrico em relação à recta $y = t$, $(\bar{y}, \bar{t})$, pertence à solução que passa por (t_0, y_0).
- *2º Método:* Suponhamos que o declive da solução que passa no ponto (t, y) é $\tan \alpha$. Para as soluções serem simétricas em relação à recta $y = t$, o declive da solução que passa em (y, t) deve ser $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$. Portanto, para as soluções serem simétricas, devem ser inversos os declives de pontos simétricos em relação à recta $y = t$. Como o declive da solução que passa em (t, y) é e^{y-t}, o declive da solução que passa em (y, t) é e^{t-y}, e $e^{t-y} = \frac{1}{e^{y-t}}$, as soluções são simétricas em relação à recta $y = t$.

2.

a) Os valores próprios de A são as soluções de $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\,\lambda + \det A = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, ou seja, $1 \pm i = 0$.

$\Lambda = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$.

$(i, 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio $1 + i$, e $(-i, 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio $1 - i$.

A matriz $S = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliza a matriz A.

A inversa de S é $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix}$.

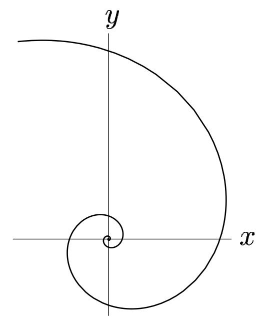
$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$.

$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix}$.

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t} & ie^{(1+i)t} - ie^{(1-i)t} \\ -ie^{(1+i)t} + ie^{(1-i)t} & e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t} \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

b) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{bmatrix}$.

c) Substituindo $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ no sistema $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y, \end{cases}$ obtém-se $\begin{cases} r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta' = r\cos\theta - r\sin\theta, \\ r'\sin\theta - r\cos\theta\,\theta' = r\cos\theta + r\sin\theta. \end{cases}$ Multiplicando a primeira equação do sistema por $\cos\theta$, a segunda equação por $\sin\theta$, e adicionando os resultados, vem $r' = r$. Finalmente, substituindo r' por r numa das equações do sistema, conclui-se que $\theta' = 1$.
$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{r}{1} = r$.
De $\frac{dr}{d\theta} = r$ tira-se $r = r_0 e^{\theta - \theta_0}$.



Esboço de $r = r_0 e^{\theta-\theta_0}$ no plano (x, y).

3. Usaremos separação de variáveis.
Vamos tentar determinar soluções da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, não triviais, de

$$(\star) = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{se } (x,y) \in]0,1[\times]0,1[, \\ u(0,y) = u(1,y) = 0, & \text{se } y \in [0,1], \\ u(x,0) = 0, & \text{se } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Substituindo $u = XY$ em $u_{xx} + u_{yy} = 0$, obtém-se $X''Y + XY'' = 0$, ou seja, $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$.
$\frac{X''}{X}$ não depende de y e $\frac{Y''}{Y}$ não depende de x. Logo, $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$, onde λ é uma constante real. Ou seja, $X'' - \lambda X = 0$ e $Y'' + \lambda Y = 0$.
De $u(0,y) = u(1,y) = 0$ tira-se que $X(0)Y(y) = X(1)Y(y) = 0$. Como pretendemos funções u não identicamente nulas, a função X deverá verificar $X(0) = X(1) = 0$.
O sistema

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, & \text{se } x \in]0,1[, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

admite soluções não triviais sse $\lambda = -n^2\pi^2$, com $n \in \mathbb{N}$; as soluções são múltiplos de $X_n = \sin(n\pi x)$.
De $u(x,0) = 0$ tira-se que $X(x)Y(0) = 0$. Como pretendemos funções u não

identicamente nulas, a função Y deverá verificar $Y(0) = 0$.
A solução geral de $Y_n'' - n^2\pi^2 Y_n = 0$ é $Y_n(y) = a_n \sinh(n\pi y) + b_n \cosh(n\pi y)$.
Como pretendemos $Y_n(0) = 0$, vem $Y_n(y) = a_n \sinh(n\pi y)$.
As funções $u_n(x,y) = c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$, $n \in \mathbb{N}$, são soluções não trivias de $(\star)$ da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$.
Formalmente, $u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$ é solução de $(\star)$. Determinemos as constantes c_n de modo a que $u_y(x,1) = f(x)$, para $0 \leq x \leq 1$.
$u_y(x,1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c_n \cosh(n\pi)\sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(n\pi x)$, se fizermos $d_n = n\pi c_n \cosh(n\pi)$. Do estudo das Séries de Fourier, sabemos que
$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(n\pi x) = f(x)$ se $d_n = 2\int_0^1 f(s)\sin(n\pi s)\, ds$.
Concluimos que, formalmente, $u(x,y) := \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$ é solução do problema do enuciado, desde que $c_n = \frac{2}{n\pi\cosh(n\pi)}\int_0^1 f(s)\sin(n\pi s)\, ds$.

Justificação (opcional):

Vamos provar que a função u, definida no último parágrafo, é de classe C^2, e que as derivadas de u podem ser calculadas termo a termo. Uma vez provado isto segue-se que a função u é harmónica. Note-se ainda que uma como $f \in C^1$ (de facto, $f \in C^2$) a Série de Fourier de $u_y(\cdot, 1)$ converge uniformemente para $f(\cdot)$.
Por simplicidade vamos provar que $f \in C^0$ implica $u \in C^0$, deixando para o leitor a prova de que $f \in C^1$ implica $u \in C^1$, e $f \in C^2$ implica $u \in C^2$.
Da desigualdade de Bessel, pode concluir-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2 < +\infty$, onde as constantes d_n são, como acima, os coeficientes de Fourier de f.
Relembrando que $d_n = n\pi c_n \cosh(n\pi)$, vem $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 c_n^2 \cosh^2(n\pi) < +\infty$.
Ora, $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \sinh(n\pi) \leq$
$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|\cosh(n\pi) \leq \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 c_n^2 \cosh^2(n\pi)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty$. Logo, a série que define u converge uniformemente e u é contínua.
Se f é C^1 deve aplicar-se a desigualdade de Bessel aos coeficientes de f' para provar que as séries de Fourier das primeiras derivadas de u convergem uniformemente. Se $f \in C^2$ deve aplicar-se a desigualdade de Bessel aos coeficientes de Fourier f'' provar que as séries de Fourier das segundas derivadas de u convergem uniformemente.
Do resultado do parágrafo anterior, e do Teorema que afirma que "a convergência uniforme de g_n para g e de g_n' para h implica que g é diferenciável e $g' = h$,"pode concluir-se que u é C^2, e que as derivadas de u podem ser calculadas termo a termo.

Prova de unicidade de solução:

Seja $S = [0,1] \times [0,1]$ e ν a normal exterior a ∂S. Note-se que $u\nabla u = 0$ em ∂S e $u\,\Delta u = 0$ em S, porque $\Delta u = 0$ em S.
$0 = \int_{\partial S} u\nabla u \cdot \nu\, dl = \iint_S \operatorname{div}(u\nabla u)\, dS = \iint_S u\,\Delta u\, dS + \iint_S |\nabla u|^2\, dS = \iint_S |\nabla u|^2\, dS$. Logo, $\nabla u \equiv 0$ em S. Portanto, u é constante. Como $u = 0$ em

parte da fronteira de S, $u \equiv 0$.

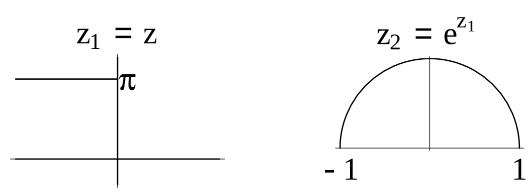
4.

a) Em $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, a função $z \mapsto \sqrt{z}$ tem derivadas parciais contínuas em ordem a r e a θ e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{z} = -\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\sqrt{z} = \frac{1}{2\sqrt{r}}e^{i\frac{\theta}{2}}$; portanto é analítica.
Se $r = 0$, então a função $z \mapsto \sqrt{z}$ não tem derivada parcial em ordem a r, pelo que não é analítica.
Em $r > 0$ e $\theta = \pi$, a função $z \mapsto \sqrt{z}$ é descontínua; portanto não é analítica.

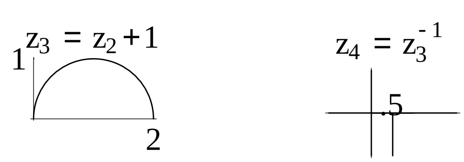
b) $z(\theta) = e^{i\theta}$, com $-\pi < \theta \leq \pi$, é uma parametrização da circunferência de raio um, centrada na origem.
$\int_{|z|=1} \sqrt{z}\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{z(\theta)}\, z'(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{\theta}{2}}\, ie^{i\theta}\, d\theta = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{3\theta}{2}}\, d\theta = \frac{2}{3}e^{i\frac{3\theta}{2}}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2i}{3}$.

5. Seja $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, e $\log z = \ln r + i\theta$. A função log é analítica em $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$. É em particular analítica em $|z - 2| \leq 1$.
A fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada de f é
$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz$. Toma-se $f(z) = \log z$, $a = 2$ e $r = 1$.
O valor do integral é $2\pi i\, \frac{d}{dz}\log z\Big|_{z=2} = 2\pi i\, \frac{1}{2} = \pi i$.

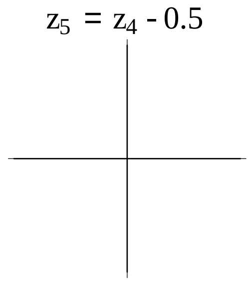
6.

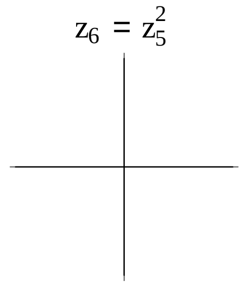


Transforma-se a faixa num semi-disco.



Leva-se um dos pontos de intersecção da circunferência com o eixo dos x para a origem. Inverte-se ($z \mapsto \frac{1}{z}$). O ponto 0 é transformado em ∞, o ponto 2 é transformado em $\frac{1}{2}$.





Desloca-se a região para a esquerda de modo a coincidir com o quarto quadrante. A função $z \mapsto z^2$ transforma um quadrante num semiplano.

Compondo as transformações acima obtém-se $z_6 = \left(\frac{1}{e^z+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{e^z-1}{e^z+1}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}\right)^2 = \frac{1}{4}\tanh^2\frac{z}{2}$.