Análise Matemática IV

1º Exame - 20 de Junho de 96

Fís. e Matem.

Resolução

1.

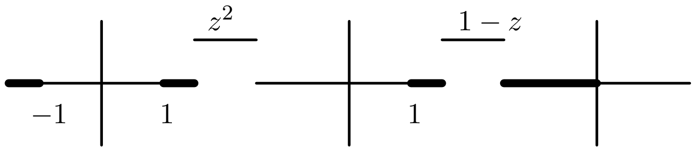
a) $\nabla\psi(u,v) = (\frac{u}{a^2}, \frac{v}{b^2})$. $\nabla\psi(g(\theta)) = (\frac{\cos\theta}{a}, \frac{\sin\theta}{b})$.
$g^\star(\nabla\psi)^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right) = (\nabla\psi\circ g)^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right) = \frac{-\frac{\sin\theta}{b}(-\frac{\sin\theta}{a})\,d\theta+\frac{\cos\theta}{a}(\frac{\cos\theta}{b})\,d\theta}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}} =$
$\frac{ab}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\,d\theta$.

b) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+d\cos(2\theta)}\,d\theta = \int_0^{4\pi}\frac{1}{1+d\cos\gamma}\frac{d\gamma}{2} = \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+d\cos\gamma}\,d\gamma$.
Fazendo $z = e^{i\gamma}$, obtém-se $\int_{|z|=1}\frac{1}{1+d(z+z^{-1})/2}\frac{dz}{iz} = \frac{2}{id}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2z/d+1} =$
$\frac{2}{id}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$, onde $z_1 = \frac{-1+\sqrt{1-d^2}}{d}$ e $z_2 = \frac{-1-\sqrt{1-d^2}}{d}$. Note-se que $z_1z_2 = 1$ e $z_1+z_2 = -\frac{2}{d}$, pelo que $|z_1| < 1$ e $|z_2| > 1$. Pelo Teorema dos Resíduos, o integral vale $2\pi i\frac{2}{id}\frac{1}{z_1-z_2} = 2\pi i\frac{2}{id}\frac{1}{\frac{2}{d}\sqrt{1-d^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-d^2}}$.

c) Seja $d = \frac{c^2-1}{c^2+1}$. Note-se que $|d| < 1$.
$\int_E(\nabla\psi)^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right) = \int_{g^{-1}(E)}g^\star(\nabla\psi)^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right) = \int_0^{2\pi}\frac{ab}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\,d\theta$
$= \frac{2c}{c^2+1}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\frac{c^2-1}{c^2+1}\cos(2\theta)}\,d\theta = \frac{2c}{c^2+1}\frac{2\pi}{\sqrt{1-d^2}} = \frac{2c}{c^2+1}\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{(c^2-1)^2}{(c^2+1)^2}}} = 2\pi$.

d) $i = \int_{(\nabla\psi)(E)}\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right) =$ nº de rotação de $(\nabla\psi)(E)$ em torno de zero $= 2\pi$.

e)



A imagem de D por $z\mapsto 1-z^2$.

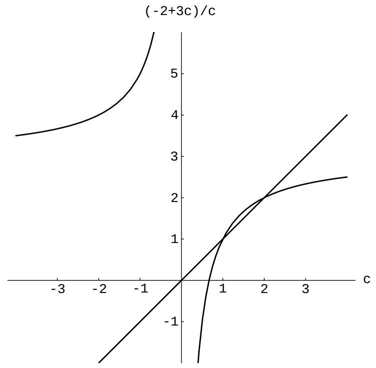
Escreva-se $w\in\mathbb{C}\setminus\{w\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} w = 0 \text{ e } \operatorname{Re} w \le 0\}$ como $w = re^{i\theta}$ com $-\pi < \theta < \pi$. Defina-se $\sqrt{w} \stackrel{\triangle}{=} r^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Então, a função $f : D\to\mathbb{C}$, definida por $f(z) = \sqrt{1-z^2}$, é analítica e $f(0) = \sqrt{1e^{i\,0}} = 1$.

f) Seja $g : D\to\mathbb{C}$, definida por $g(z) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+z\cos(2\theta)}\,d\theta$. A função g está bem definida, já que se $\theta\in[0,2\pi]$ e $z\in D$, então $1+z\cos(2\theta)\neq 0$. Além disso g é analítica, porque $\frac{\partial g}{\partial\bar z} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{1}{1+z\cos(2\theta)}\,d\theta = 0$.
A função $h : D\to\mathbb{C}$, definida por $h(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-z^2}}$ é analítica, pela alínea anterior.

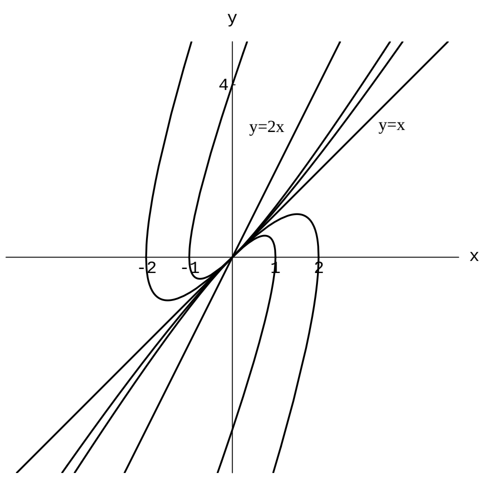
Concluímos que ambas as funções g e h são analíticas. As duas funções são iguais, porque coincidem num segmento de recta.
Observação: Portanto, $\sqrt{1-z^2} = 2\pi \Big/ \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+z\cos(2\theta)}\, d\theta$.

2.

a) Seja $c = \frac{y}{x}$. Então $\frac{-2x+3y}{y} = \frac{-2+3c}{c}$. De $\frac{-2+3c}{c} = c$ tira-se $c = 1$ ou $c = 2$. $c = \frac{2}{3}$ implica $\frac{-2+3c}{c} = 0$. $c = 0$ implica $\frac{-2+3c}{c} = \infty$. $c = \infty$ implica $\frac{-2+3c}{c} = 3$. $\frac{-2+3c}{c} < 0$ se $0 < c < \frac{2}{3}$.



O gráfico de $c \mapsto \frac{-2+3c}{c}$.



Esboço das soluções da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+3y}{y}$.

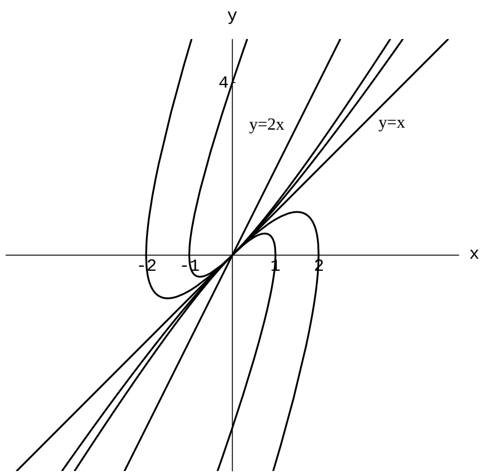
b) $y = xv$, logo $y' = v + xv'$.
Temos $v + xv' = -\frac{2}{v} + 3$, ou seja, $xv' = -\frac{v^2-3v+2}{v}$. Esta equação é separável. $v = 1$ e $v = 2$ são soluções da equação. Se $v \neq 1$ e $v \neq 2$, vem $-\frac{v}{v^2-3v+2} v' = \frac{1}{x}$, i.e., $\left(\frac{1}{v-1} - \frac{2}{v-2}\right) v' = \frac{1}{x}$, ou $\ln \frac{|v-1|}{(v-2)^2} = \ln(c|x|)$, com $c \in \mathbb{R}^+$. Finalmente, $\frac{v-1}{(v-2)^2} = cx$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Em termos de x e y, $\frac{y-x}{(y-2x)^2} = c$ com $c \in \mathbb{R}$ ou $y = 2x$.

c) Os valores próprios de A são 1 e 2. Um vector próprio associado a 1 é $(1,1)$ e um vector próprio associado a 2 é $(1,2)$. $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$.

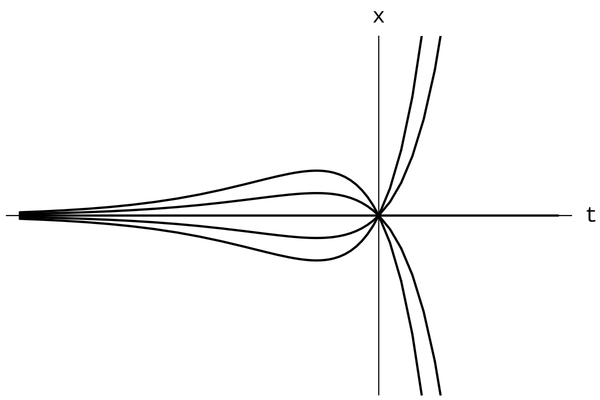
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} x_0(2e^t - e^{2t}) + y_0(-e^t + e^{2t}) \\ x_0(2e^t - 2e^{2t}) + y_0(-e^t + 2e^{2t}) \end{bmatrix}$.

d)



O retrato de fase do sistema.

e) Tem-se $x' = y$ e $y' = -2x + 3y$. Logo $x'' = y' = -2x + 3y = -2x + 3x'$, ou seja, $x'' - 3x' + 2x = 0$.
Da alínea anterior, é $x(t) = x_0(2e^t - e^{2t}) + y_0(-e^t + e^{2t})$ a solução da equação que verifica $x(0) = x_0$ e $x'(0) = y_0$.
Usando o retrato de fase do sistema, é imediato o



Esboço das soluções que verificam $x(0) = 0$.

$$x(t) = y_0(-e^t + e^{2t}),\ y_0 \in \mathbb{R}.$$

f) Trata-se de uma equação da forma $z' = f(x,z)$, com condição inicial $z(x_0) = 0$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,z) = -4x + 6\sqrt{z}$.
Verifiquemos que $f(x_0, \cdot)$ não é localmente Lipschitziana em torno de $(x_0, 0)$. $f(x_0, z_1) - f(x_0, z_2) = 6\sqrt{z_1} - 6\sqrt{z_2}$. Em particular, $f(x_0, z_1) - f(x_0, 0) = 6\sqrt{z_1}$. Qualquer que seja $L > 0$ e $\delta > 0$, existe $0 < z_1 < \delta$ tal que $|f(x_0, z_1) - f(x_0, 0)| > L|z_1 - 0|$. De facto, basta tomar $0 < z_1 < (\frac{6}{L})^2$. Isto prova que $f(x_0, \cdot)$ não é localmente Lipschitziana em torno de $(x_0, 0)$.
Logo, o Teorema de Picard não é aplicável com a condição inicial $z(x_0) = 0$.
Seja $y = \sqrt{z}$. Note-se que $y \geq 0$. Segue que $z = y^2$ e $z' = 2yy'$. Em termos de y, a equação é $2yy' = -4x + 6y$, ou seja, a equação acima, $yy' = -2x + 3y$. Portanto, desde que $y(x) \geq 0$, as soluções de $z' = -4x + 6\sqrt{z}$ são definidas por $z(x) = y^2(x)$, onde y é como nas alíneas **a)** e **b)**.
Observando o esboço da alínea **a)**, conclui-se que se $x_0 < 0$, então a equação tem uma única solução, definida em $[x_0, +\infty[$. Se $x_0 = 0$, então a equação tem infinitas soluções. Se $x_0 > 0$, então a equação tem uma única solução, definida em $[0, x_0]$.
Note-se que $z'(x_0) = -4x_0$.