Análise Matemática IV

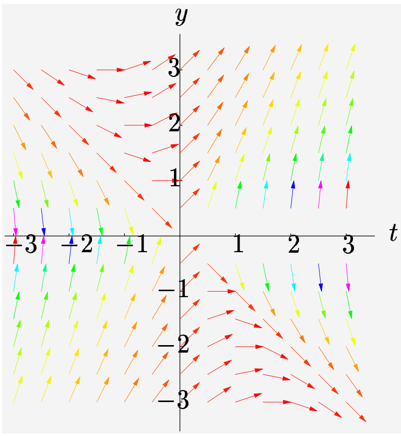
1º Exame - 4 de Janeiro de 2007

LEBM + LEC + LEFT + LEGM + LMAC

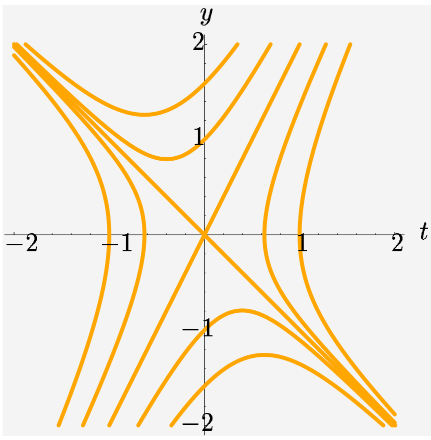
Resolução

1.

a) $y' = \frac{2t+y}{y} = \frac{2+m}{m}$, com $m = \frac{y}{t}$. Note-se que $m = 0 \Rightarrow y' = \infty$, $m = \infty \Rightarrow y' = 1$, $m = -2 \Rightarrow y' = 0$, $m = 1 \Rightarrow y' = 3$, e $y' = \frac{2+m}{m} = m \Rightarrow (m = -1$ ou $m = 2)$.



Campo de direcções de $y' = 1 + 2t/y$.



Esboço dos gráficos das soluções de $y' = 1 + 2t/y$.

b) Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $y - 2t$ obtém-se

$$M + Ny' = (y^2 - 4t^2) + (2ty - y^2)y' = 0.$$

Esta equação é exacta porque $M_y = N_t = 2y$. Como $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo, (M,N) é gradiante, ou seja, existe ϕ tal que $\nabla\phi = (\phi_t, \phi_y) = (M,N)$. Obtém-se

$$\begin{cases} \phi_t = y^2 - 4t^2 \\ \phi_y = 2ty - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi = -\frac{4}{3}t^3 + ty^2 + c_1(y) \\ \phi = ty^2 - \frac{1}{3}y^3 + c_2(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \phi = -\frac{4}{3}t^3 + ty^2 - \frac{1}{3}y^3 + k_1.$$

A equação diferencial pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}\phi(t,y(t)) = \phi_t + \phi_y y' = 0 \Leftrightarrow \phi(t,y(t)) = k_2$$

$$\Leftrightarrow -4t^3 + 3ty^2 - y^3 = -c.$$

Esta equação tem as soluções $y = -t$ e $y = 2t$ quando $c = 0$. Factorizando,

$$(t+y)(2t-y)^2 = c.$$

c)

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x + 1x' \\ 2x + 1x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X.$$

d) O polinómio característico de A é $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$. O vector $[1 \ \ -1]^T$ é próprio associado ao valor próprio -1, e o vector $[1 \ 2]^T$ é próprio associado ao valor próprio 2. Logo,

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

com

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{2t} & e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz e^{At} é uma matriz Wronskiana. A solução do sistema com condição inicial $X(0) = [x_0 \ \dot{x}_0]^T$ é

$$X(t) = e^{At}X(0) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x_0(2e^{-t} + e^{2t}) + \dot{x}_0(-e^{-t} + e^{2t}) \\ x_0(-2e^{-t} + 2e^{2t}) + \dot{x}_0(e^{-t} + 2e^{2t}) \end{bmatrix}.$$

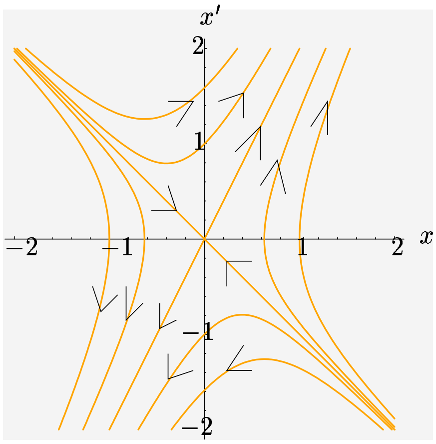
e) Pela derivada da função composta,

$$\frac{d}{dx}[x'(t(x))] = \frac{d}{dt}x'(t) \times \frac{dt}{dx} = \frac{x''}{x'} = \frac{2x + x'}{x'}.$$

Esta é a equação diferencial da alínea **a)**,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t + y}{y},$$

com x' no lugar de y, e x no lugar de t.
Se x' é positivo, então x é crescente; se x' é negativo, então x é decrescente:



Retrato de fase do sistema.

2.

a) Vamos usar separação de variáveis e procurar soluções da forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo na equação diferencial,

$$X''Y + XY'' = 0, \text{ ou } \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda, \text{ ou } \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ Y'' - \lambda Y = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, de $u(0, y) = u(a, y) = 0$ tira-se que $X(0) = X(a) = 0$. Sabemos das aulas que

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, \\ X(0) = X(a) = 0, \\ X \not\equiv 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \\ X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \\ c_n \neq 0, \\ n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Facilmente se conclui que a equação $Y_n'' - \lambda_n Y_n = 0$ conduz a

$$Y_n(y) = \alpha_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right).$$

Agora de $u_y(x,0) = 0$ tira-se $Y_n'(0) = 0$, o que implica $\beta_n = 0$. Assim,

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right), n = 1,2,3,\ldots.$$

Somando estas soluções obtemos uma solução formal da equação de Laplace com as condições fronteira especificadas na base do rectângulo $[0,a]\times[0,b]$, assim como nos lados esquerdo e direito:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right). \qquad (*)$$

Finalmente, de $u_y(x,b) = f(x)$ conclui-se que devemos ter

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{n\pi}{a}\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = f(x). \qquad (**)$$

Estendendo f como função ímpar ao intervalo $[-a,a]$ e expandindo a extensão de f em série de Fourier, obtém-se

$$a_n \frac{n\pi}{a}\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx,$$

ou seja,

$$a_n = \frac{2}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx, \qquad (***)$$

para $n = 1,2,3,\ldots$. A solução de (P) é dada por $(*)$ com os coeficientes a_n definidos por $(***)$

b) De $(**)$ com $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$, tira-se que

$$a_2 \frac{2\pi}{a}\sinh\left(\frac{2\pi b}{a}\right) = 1$$

e que os restantes a_n's são zero. Assim,

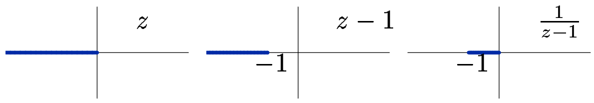
$$u(x,y) = \frac{a}{2\pi\sinh\left(\frac{2\pi b}{a}\right)}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right).$$

3.

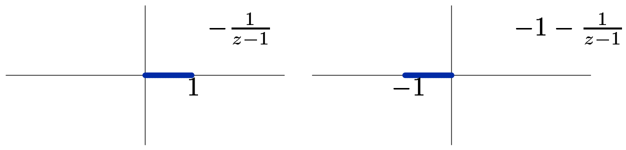
a) Sabemos que a função f não está definida em 0 e não é diferenciável em $S :=]-\infty, 0[$. Como

$$z = \frac{w}{w+1} \Leftrightarrow w = -\frac{z}{z-1} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

a função g não está definida em 0 e não é diferenciável na imagem de S por $z \mapsto -1 - \frac{1}{z-1}$.



Os planos z, $z-1$ e $\frac{1}{z-1}$.



Os planos $-\frac{1}{z-1}$ e $-\frac{z}{z-1}$.

Conclusão: a função g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$.

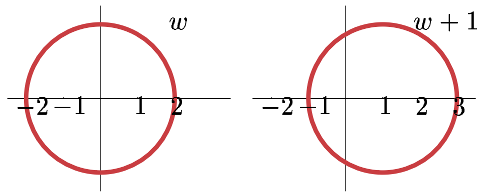
b)

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \log z \, dz &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\substack{|z|=2 \\ |\arg z| < \pi - \epsilon}} \log z \, dz \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} (z \log z - z)\Big|_{2e^{-i(\pi-\epsilon)}}^{2e^{i(\pi-\epsilon)}} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} [2e^{i(\pi-\epsilon)}(\log 2 + i(\pi - \epsilon) - 1) \\
&\qquad -2e^{-i(\pi-\epsilon)}(\log 2 - i(\pi-\epsilon) - 1)] \\
&= -2(\log 2 + i\pi - 1) + 2(\log 2 - i\pi - 1) \\
&= -4\pi i.
\end{aligned}$$

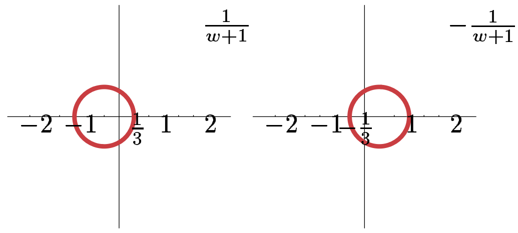
c) Como $\frac{d}{dw}\frac{w}{w+1} = \frac{d}{dw}\left(1 - \frac{1}{w+1}\right) = \frac{1}{(w+1)^2}$,

$$\begin{aligned}
\int_{|w|=2} \log\left(\tfrac{w}{w+1}\right) dw &= w \log\left(\tfrac{w}{w+1}\right)\Big|_{-2}^{-2} - \int_{|w|=2} w \tfrac{w+1}{w} \tfrac{1}{(w+1)^2} \, dw \\
&= -\int_{|w|=2} \tfrac{1}{w+1} \, dw \\
&= -2\pi i.
\end{aligned}$$

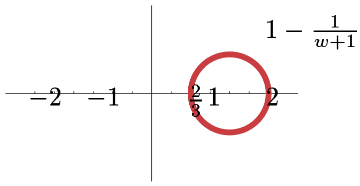
d) Tem-se $\frac{w}{w+1} = 1 - \frac{1}{w+1}$.



Os planos w, $w+1$.



Os planos $\frac{1}{w+1}$ e $-\frac{1}{w+1}$.
As duas circunferências são descritas no sentido inverso.



O plano $\frac{w}{w+1}$. A circunferência é descrita no sentido inverso.

e) $\int_{|w|=2} \log\left(\frac{w}{w+1}\right) dw = -\int_{|z-4/3|=2/3} \log z \frac{1}{(z-1)^2}\, dz = -2\pi i \frac{d}{dz} \log z\Big|_{z=1} = -2\pi i \frac{1}{z}\Big|_{z=1} = -2\pi i$. A primeira igualdade resulta de $\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz}\left(-1 - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{(z-1)^2}$ e da circunferência $|z-4/3| = 2/3$ ser descrita no sentido inverso. A segunda igualdade resulta da Fórmula Integral de Cauchy.

f) A função $w \mapsto \log\left(\frac{w}{w+1}\right)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$, pelo que o Teorema de Cauchy implica que $\int_\gamma \log\left(\frac{w}{w+1}\right) dw = \pm 2\pi i$ se γ é homotópica em $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$ à circunferência centrada na origem de raio 2 descrita no sentido inverso (directo), e é igual a 0 se γ é homotópica a um ponto.

g) Para $|z-1| < 1$,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \log z &= \frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = 1 - (z+1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \ldots, \\
\log z &= (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \ldots, \\
\frac{\log z}{(z-1)^2} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} + \frac{z-1}{3} - \frac{(z-1)^2}{4} + \ldots.
\end{aligned}
$$

O desenvolvimento em série de Laurent permite concluir que o ponto 1 é um pólo de primeira ordem com resíduo igual a 1.