Análise Matemática IV

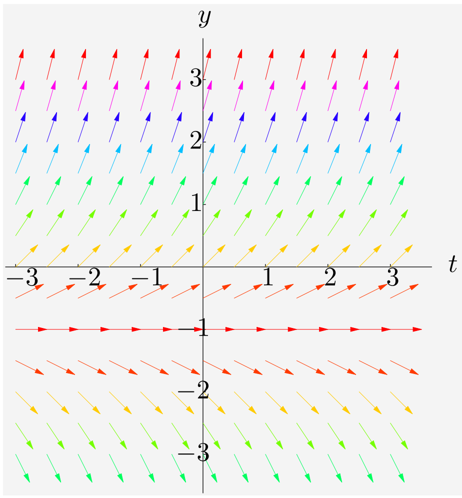
1º Exame - 5 de Janeiro de 2006

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

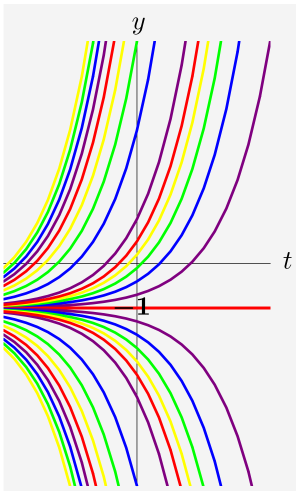
Resolução

1.

a)



Campo de direcções de $y' = y + 1$.



Esboço dos gráficos das soluções de $y' = y + 1$.

b) 1ª *resolução (encarando a equação como linear).* Um factor de integração é $\mu(t) = e^{\int(-1)\,dt} = e^{-t}$. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por μ,

$$e^{-t}y' - e^{-t}y = e^{-t},$$

ou

$$\frac{d}{dt}(e^{-t}y) = e^{-t}.$$

Integrando ambos os membros entre t_0 e t,

$$e^{-t}y(t) - e^{-t_0}y(t_0) = -e^{-t} + e^{-t_0}.$$

Donde,

$$y(t) = (y(t_0) + 1)e^{t-t_0} - 1.$$

2^a *resolução (encarando a equação como separável).* A função $y(t) \equiv -1$ é solução da equação diferencial. Pela unicidade de solução, ou a função y é identicamente -1, ou então nunca é igual a -1. Neste caso,

$$\frac{y'}{y+1} = 1.$$

Integrando ambos os membros entre t_0 e t,

$$\log\left|\frac{y(t)+1}{y(t_0)+1}\right| = t - t_0.$$

Como os gráficos das soluções não cruzam a recta $y = -1$, novamente devido à unicidade de solução, $y(t_0) < -1 \Rightarrow y(t) < -1$ e $y(t_0) > -1 \Rightarrow y(t) > -1$. Podemos então tirar o módulo na igualdade acima:

$$\log\left(\frac{y(t)+1}{y(t_0)+1}\right) = t - t_0.$$

Tomando a exponencial de ambos os membros,

$$y(t) + 1 = (y(t_0) + 1)e^{t-t_0}.$$

Acontece que esta expressão também é válida para $y(t_0) = -1$. Logo,

$$y(t) = (y(t_0) + 1)e^{t-t_0} - 1.$$

2.

a) Trata-se de uma equação linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes pelo que vamos procurar soluções da forma $y(t) = e^{rt}$. Substituindo na equação diferencial e dividindo por e^{rt},

$$r^2 + 2r - 8 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r+4) = 0.$$

A solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{2t}.$$

Para que sejam satisfeitas as condições iniciais, $c_1 + c_2 = 1$ e $-4c_1 + 2c_2 = 2$. Este sistema conduz a $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. A solução que satisfaz as condições iniciais dadas é $y(t) = e^{2t}$.

b) Fazendo $x_1 = y$ e $x_2 = y'$,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

que é da forma $\dot{x} = Ax$. O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A\, \lambda + \det A = \lambda^2 + 2\lambda - 8$, pelo que A tem valores próprios -4 e 2. Resolvendo a equação $(A + 4I)v = 0$ conclui-se que $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ é um vector próprio associado ao valor próprio -4 e resolvendo a equação $(A - 2I)v = 0$ conclui-se que $v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vector próprio associado ao valor próprio 2. Considerando a matriz

$$S = [v_1\ v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

que tem inversa

$$S^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

tem-se que

$$A = S \Lambda S^{-1},$$

com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{At} &= S e^{\Lambda t} S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} S^{-1} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2e^{-4t} + 4e^{2t} & -e^{-4t} + e^{2t} \\ -8e^{-4t} + 8e^{2t} & 4e^{-4t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

c) Como $x(t) = e^{At} x_0 = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$y(t) = x_1(t) = \frac{1}{6}[(2e^{-4t} + 4e^{2t}) + 2(-e^{-4t} + e^{2t})] = e^{2t},$$

o que confirma o resultado da alínea a).

3. Vamos procurar soluções de $u_t = u_{xx}$ da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo na equação diferencial, $XT' = X''T$, ou $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$. Conclui-se que ambos os membros da última igualdade são uma mesma constante, constante essa que designaremos por $-\lambda$. Tem-se $X'' + \lambda X = 0$ e $T' = -\lambda T$. Das condições fronteira para u, $u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0$ e $u_x(\pi,t) = X'(\pi)T(t) = 0$. Uma vez que não queremos $T(t) \equiv 0$ (porque isso conduziria a $u(x,t) \equiv 0$), tiramos $X'(0) = X'(\pi) = 0$. As soluções não nulas de

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \text{ em } 0 < x < \pi, \\ X'(0) = X'(\pi) = 0, \end{cases}$$

podem ser indexadas em $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{cases} \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\pi^2} = n^2, \\ X_n(x) = c_n \cos(nx), \end{cases}$$

onde os c_n's são constantes. Agora a equação $T' = -n^2 T$, conduz a $T(t) = d_n e^{-n^2 t}$, onde os d_n's são constantes. Fazendo o produto de X_n por T_n, obtém-se

$$u_n(x,t) = a_n e^{-n^2 t} \cos(nx),$$

com $a_n = c_n d_n$. Cada uma destas funções u_n satisfaz a equação diferencial com as condições fronteiras impostas, logo

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos(nx)$$

é também uma solução formal da equação diferencial com as condições fronteiras impostas. Para satisfazer a condição inicial vamos impor que

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \cos(2x) - 3\cos(4x).$$

Pelo facto de as funções $x \mapsto \cos(nx)$ serem ortogonais em $L^2(-\pi,\pi)$, tira-se que $a_2 = 1$, $a_4 = -3$, sendo todos os restantes a_n's nulos. Substituindo na expressão para $u(x,t)$,

$$u(x,t) = e^{-4t}\cos(2x) - 3e^{-16t}\cos(4x).$$

Verifica-se facilmente que esta é uma solução da equação diferencial com as condições fronteira e iniciais dadas.
Observação. Usando o método da energia pode provar-se unicidade.

4.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right],$$

com

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Como a função f é ímpar, todos os a_n's são nulos e

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \pi \sin(nx)\,dx = \frac{2}{n}[-\cos(n\pi)+1] = \begin{cases} \frac{4}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

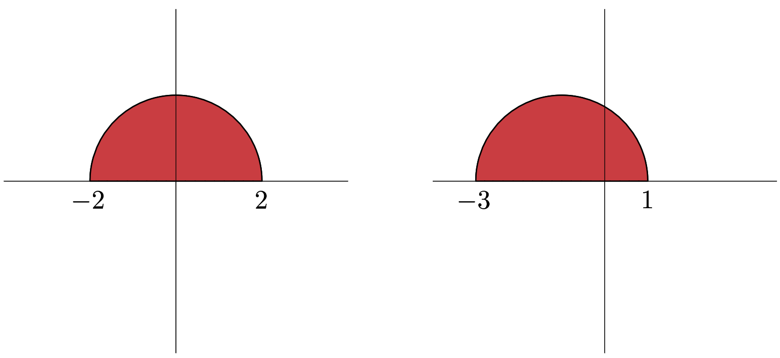
Para $0 < |x| < \pi$,

$$f(x) = 4\left[\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots\right],$$

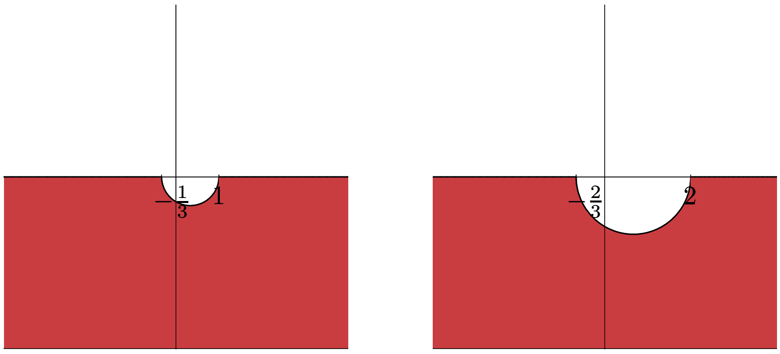
onde a série do segundo membro converge pontualmente. Para $x = 0$, a soma da série vale 0 enquanto $f(0) = \pi$. Também para $x = \pm\pi$ a soma da série vale 0 enquanto $f(-\pi) = -\pi$, $f(\pi) = \pi$.

5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y}$, onde $z = x+iy$. Então $f_x(z) = ie^{iz}$ e $f_y(z) = -e^{iz}$. Como f tem derivadas parciais contínuas e as derivadas satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$, a função f é diferenciável. A sua derivada é $f'(z) = f_x(z) = ie^{iz}$.

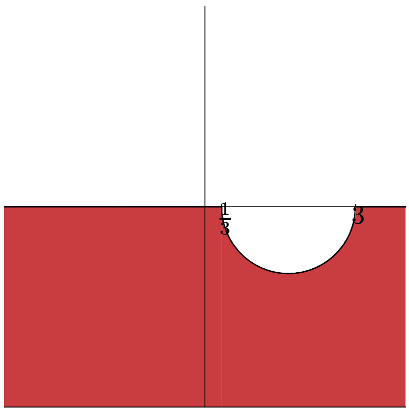
6. $\frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}$.



Os planos z e $z-1$.



Os planos $\frac{1}{z-1}$ e $\frac{2}{z-1}$.



O plano $1+\frac{2}{z-1}$.

7.

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z/3}\right) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \text{ para } \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 3.$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-3/z}\right) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} \text{ para } \left|\frac{3}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 3.$$

8. Seja $f : \mathbb{C}\setminus\{-2i, 2i\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)} = \frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-2i)}$. Tem-se,

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-2i}, \text{ com } g(z) = \frac{e^{iz}}{(z+2i)}.$$

A função g é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$. Seja $R > 2$ e γ um contorno fechado formado pela união do segmento de recta que une $-R$ e R com a semicircunferência centrada na origem no semiplano superior, descrita no sentido directo. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i g(2i) = \frac{\pi}{2} e^{-2}.$$

Logo,

$$\frac{\pi}{2} e^{-2} = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\, dz. \quad (*)$$

Como $|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y} \leq 1$ para $y = \Im z \geq 0$, o cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando $R \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\, dz \right| &\leq \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} \frac{1}{(R^2-4)} |dz| \\ &= \frac{\pi R}{(R^2-4)} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty. \end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os membros de $(*)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-2}$. Finalmente, tomando as partes reais, $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-2}$.

9. A função f tem uma singularidade removível na origem porque $\lim_{z\to 0}[z f(z)] = 0$. Logo a extensão, $\bar{f}$, de f a $\mathbb{C}$,

$$\bar{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \neq 0, \\ \lim_{z\to 0} f(z) & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

é inteira. A extensão é também limitada porque f é limitada. Pelo Teorema de Liouville, $\bar{f}$ é constante. Conclui-se que f é constante em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.