

Análise Matemática IV

19 de Junho de 97

Civ., Fís. e Matem.

2º Teste – Grupos (1 ou 2) e 3 – 90 minutos

1º Exame – Grupos (1 ou 2) e 3, 4, 5 e 6 – 3 horas

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial $y' = e^{y-t}$.

a) Esboce o seu campo de direcções. (3)

b) Determine a solução da equação que satisfaz $y(t_0) = y_0$. Sugestão: A equação é separável. (2)

c) As soluções são simétricas em relação à recta $y = t$. Justifique. (1)

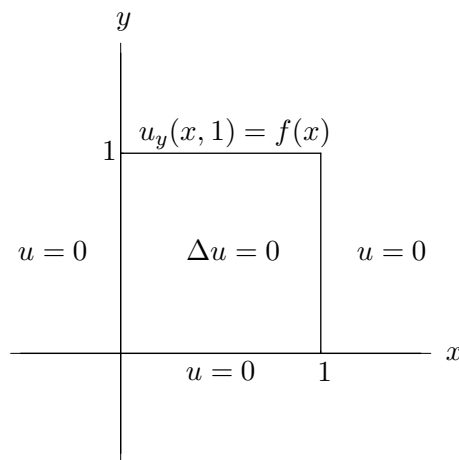
2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule e^{At} . (3)

b) Calcule a solução de $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. (2)

c) Em termos de coordenadas polares, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, verifique que o sistema da alínea b) pode ser escrito $r' = r$ e $\theta' = 1$, ou seja, $\frac{dr}{d\theta} = r$.
Escreva r em função de θ . (1)

3. Seja $f \in C^2[0, 1]$, tal que $f(0) = f(1) = 0$. Determine a função harmónica no quadrado de lado um representado na figura que satisfaz as condições fronteira mistas indicadas. (4)



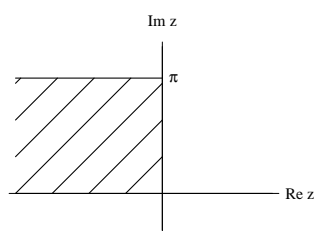
4. Seja $z = re^{i\theta}$, com $r \geq 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, e $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$.

a) Determine a região de analiticidade da função raiz quadrada. Justifique, usando as equações de Cauchy-Riemann na forma polar. (2.5)

b) Usando a definição, calcule $\int_{|z|=1} \sqrt{z} dz$. (2.5)

5. Calcule $\int_{|z-2|=1} \frac{\log z}{(z-2)^2} dz$. Justifique. (2.5)

6. Determine uma aplicação bijectiva e analítica da região a sombreado na figura (2.5)



num semiplano.