Análise Matemática IV

20 de Junho de 96

Fís. e Matem.

2º Teste	–	Grupo 2	–	90 minutos
1º Exame	–	Grupos 1 e 2	–	3 horas

Apresente os cálculos

1. Sejam a e $b > 0$. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\psi(u,v) = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)$, e $E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \psi(u,v) = \frac{1}{2}\}$, com a orientação induzida pela parametrização $g :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, definida por $g(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$.

*__a)__ Mostre que $g^\star(\nabla\psi)^\star\left(\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}\right) = \frac{ab}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}\,d\theta$. (2)

Fazendo $c = \frac{b}{a}$, obtém-se $\frac{ab}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{2c}{c^2+1}\frac{1}{1+\frac{c^2-1}{c^2+1}\cos(2\theta)}\,d\theta$.

b) Seja $d \in \mathbb{R}$, $|d| < 1$. Usando o Teorema dos resíduos, mostre que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+d\cos(2\theta)}\,d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-d^2}}$. (2.5)

*__c)__ Usando o resultado das alíneas anteriores, calcule $i = \int_E (\nabla\psi)^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right)$. (1.5)

*__d)__ Interpretando i em termos do número de rotação, confirme o valor que obteve na alínea anterior. (1)

e) Seja $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ e } |\operatorname{Re} z| \geq 1\}$. Mostre que se pode definir $\sqrt{\cdot}$ de modo a que a função $f : D \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \sqrt{1-z^2}$, seja analítica e $f(0) = 1$. Sugestão: Calcule a imagem de D por $z \mapsto (1-z^2)$. (2)

f) A fórmula $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+z\cos(2\theta)}\,d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-z^2}}$ é válida em D? Justifique. (1)

2.

a) Esboce o campo de direcções e as soluções da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+3y}{y}$. (2)

b) Seja $v = \frac{y}{x}$. Determine uma equação diferencial para v, resolva-a e determine, de forma implícita, as soluções da equação da alínea anterior. (2)

c) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine e^{At}. (2.5)

Considere o sistema $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Sejam x_0 e $y_0 \in \mathbb{R}$. Determine explicitamente a solução do sistema que verifica $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

d) Esboce o retrato de fase do sistema. (1)

e) Seja (x, y) uma solução do sistema. Determine para x uma equação diferencial de segunda ordem, linear e homogénea. (1.5)
Qual a solução dessa equação que verifica $x(0) = x_0$ e $x'(0) = y_0$?
Esboce as soluções que verificam $x(0) = 0$. Sugestão: Use a alínea anterior.

f) Considere a equação $z' = -4x + 6\sqrt{z}$, com condição inicial $z(x_0) = 0$. (1)
O Teorema de Picard garante unicidade de solução? Justifique.
Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, determine o número de soluções da equação. Sugestão: Faça uma mudança de variáveis.