Análise Matemática IV

4 de Janeiro de 2007

LEBM + LEC + LEFT + LEGM + LMAC

2º Teste	–	Perguntas 1, 2 e 3g)	–	90 minutos
1º Exame	–	Todas as perguntas	–	3 horas

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial ordinária de 1ª ordem $2t + y - yy' = 0$.

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (2)

b) Verifique que $y - 2t$ é factor integrante. Resolva a equação diferencial. De preferência, apresente o resultado numa forma factorizada de modo a que fiquem claras duas soluções particulares. (1.5)

Considere agora a equação diferencial ordinária de 2ª ordem $x'' - x' - 2x = 0$.

c) Escreva a equação na forma de um sistema de primeira ordem, $\dot{X} = AX$, com $X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$. (0.5)

d) Calcule e^{At} e a solução do sistema $\dot{X} = AX$ tal que $X(0) = [x_0\ \dot{x}_0]^T$. Caso não tenha resolvido a alínea **c)** tome $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. (2)

e) Se $x'(t) \neq 0$, então a função $t \mapsto x(t)$ admite inversa local $x \mapsto t(x)$. Mostre que $\frac{d}{dx}[x'(t(x))] = \frac{2x+x'}{x'}$. Portanto, as trajectórias do retrato de fase do sistema correspondem aos gráficos das soluções da equação diferencial ordinária da alínea **a)**. Indique os sentidos em que essas trajectórias são percorridas. (0.5)

2. Sejam $a, b > 0$, e $f \in C^2[0, a]$ tal que $f(0) = f(a) = 0$. Considere o problema (P),

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 & \text{se } (x,y) \in]0,a[\times]0,b[, \\ u(0,y) = u(a,y) = 0 & \text{se } y \in [0,b], \\ u_y(x,0) = 0 & \text{se } x \in [0,a], \\ u_y(x,b) = f(x) & \text{se } x \in [0,a]. \end{cases}$$

a) Determine a solução de (P). (2)

b) Particularize a resposta à alínea anterior para $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$. (0.5)

3. Considere a função logaritmo principal, $z \mapsto f(z) = \log z$.

a) Analise a diferenciabilidade de $w \mapsto g(w) = \log\left(\frac{w}{w+1}\right)$: Fazendo $z = \frac{w}{w+1}$, escreva w em termos de z e determine geometricamente a imagem no plano w do conjunto onde o logaritmo principal não é diferenciável. (1.5)

b) Calcule $\int_{|z|=2} \log z \, dz = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\substack{|z|=2 \\ |\arg z| < \pi - \epsilon}} \log z \, dz$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo. (2)

c) Calcule $\int_{|w|=2} \log\left(\frac{w}{w+1}\right) dw$ usando integração por partes. (2)

d) Calcule a imagem da circunferência centrada na origem de raio 2, descrita no sentido directo, por $w \mapsto \frac{w}{w+1}$. (1.5)

e) Calcule $\int_{|w|=2} \log\left(\frac{w}{w+1}\right) dw$ usando a substituição $z = \frac{w}{w+1}$ e a Fórmula Integral de Cauchy, confirmando o resultado da alínea **c)**. (2)

f) Quais os possíveis valores de $\int_\gamma \log\left(\frac{w}{w+1}\right) dw$ ao longo de curvas simples fechadas γ contidas na região de holomorfia da função integranda? (1)

g) Calcule o desenvolvimento em série de Laurent de $z \mapsto \frac{\log z}{(z-1)^2}$ em torno de $z = 1$. Classifique esta singularidade e calcule o resíduo respectivo. (1)