

# Análise Matemática IV

5 de Janeiro de 2006

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

2º Teste – Perguntas 1 a 4 – 1 h e 40 min

1º Exame – Todas as perguntas – 3 horas

**Apresente os cálculos**

- 1.** Considere a equação

$$y' - y = 1.$$

- a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das suas soluções. (1)  
b) Determine as suas soluções. (1.5)

- 2.** Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

- a) Resolva a equação diferencial e determine a solução que satisfaz as condições iniciais dadas. (1)  
b) Escreva a equação na forma de um sistema  $2 \times 2$ ,  $\dot{x} = Ax$ , e determine  $e^{At}$ . (1.5)  
c) Use a alínea anterior para confirmar a resposta à alínea a). (1)

- 3.** Determine uma solução de (2.5)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi \text{ e } t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0, \\ u(x, 0) = \cos(2x) - 3\cos(4x) & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

- 4.** Determine a série de Fourier da função  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , (1.5)

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \leq x < 0, \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

- 5.** Estude a diferenciabilidade da função  $z \mapsto e^{iz}$  usando as equações de Cauchy-Riemann, e calcule a sua derivada. (2)

- 6.** Calcule geometricamente a imagem da região  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \text{ e } \Im z > 0\}$  pela transformação  $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$ . (2)

- 7.** Calcule os desenvolvimentos em série de Laurent em torno do ponto zero de  $z \mapsto \frac{1}{z-3}$ , indicando as regiões onde são válidos. (2)

- 8.** Calcule usando integrais de contorno  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+4} dx$ . (3)

- 9.** Seja  $f$  analítica e limitada em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Pode concluir mais alguma coisa sobre a função  $f$ ? Justifique. (1)