

Análise Matemática IV

5 de Janeiro de 2006

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

2º Teste – Perguntas 1 a 4 – **1 h e 40 min**

1º Exame – Todas as perguntas – **3 horas**

Apresente os cálculos

1. Considere a equação

$$y' - y = 1.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das suas soluções. (1)

b) Determine as suas soluções. (1.5)

2. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

a) Resolva a equação diferencial e determine a solução que satisfaz as condições iniciais dadas. (1)

b) Escreva a equação na forma de um sistema 2×2 , $\dot{x} = Ax$, e determine e^{At} . (1.5)

c) Use a alínea anterior para confirmar a resposta à alínea a). (1)

3. Determine uma solução de (2.5)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi \text{ e } t > 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0, \\ u(x, 0) = \cos(2x) - 3\cos(4x) & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

4. Determine a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, (1.5)

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \leq x < 0, \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

5. Estude a diferenciabilidade da função $z \mapsto e^{iz}$ usando as equações de Cauchy-Riemann, e calcule a sua derivada. (2)

6. Calcule geometricamente a imagem da região $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \text{ e } \Im z > 0\}$ pela transformação $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$. (2)

7. Calcule os desenvolvimentos em série de Laurent em torno do ponto zero de $z \mapsto \frac{1}{z-3}$, indicando as regiões onde são válidos. (2)

8. Calcule usando integrais de contorno $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+4} dx$. (3)

9. Seja f analítica e limitada em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pode concluir mais alguma coisa sobre a função f ? Justifique. (1)