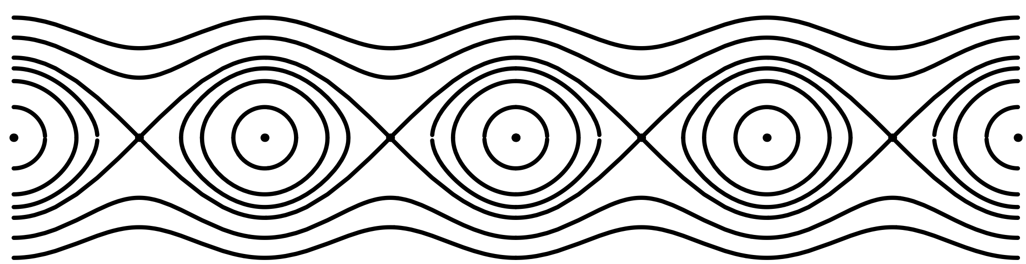
Análise Matemática IV

Problemas de Teste e Exame e sua Resolução



Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
Janeiro de 2007

Pedro Martins Girão

Índice

Assinalam-se com * as perguntas que pressupõem o conhecimento de formas diferenciais.

Incluem-se gráficos complementares, que tornam a leitura mais agradável e contribuem para acentuar a componente geométrica das questões. Estes gráficos não foram requeridos, nem são necessários à resolução dos problemas.

Este texto está disponível em
http://www.math.ist.utl.pt/~pgirao/amiv/

Análise Matemática IV

1° Teste - 4 de Maio de 96

Fís. e Matem.

Duração: 90 min. + 20 min. de tol.

Apresente os cálculos

1. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = -i/\bar{z}$. Escrevemos $z = x + iy$, com x e $y \in \mathbb{R}$, e $f(x + iy) = F_1(x, y) + iF_2(x, y)$, com F_1 e F_2 campos escalares reais.

a) Determine F_1 e F_2. (2)

b) Verifique que $f[f(z)] = -z$, ou seja, que $f \circ f = -\mathrm{id}$. (2)

c) Seja $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determine a imagem da recta $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2b}\}$ por $-f$. (2)

d) Suponha que g é analítica, $g(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, com u e v campos escalares reais. Seja $G = (u, v)$. Verifique que $|g'(z)|^2 = \det DG(x, y)$. (2)

e) Seja $F = (F_1, F_2)$. Aplique o resultado da alínea anterior a $g = \bar{f}$ para obter $\det DF(x, y) = -|(\bar{f})'(z)|^2 = -\frac{1}{|z|^4}$. (1)

***2.** Seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, com orientação o, definida por $o(x, y) = -y\,dx + x\,dy$. Seja $g :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, definida por $g(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

a) Como sabe, $\int_C o = \int_C o \cdot o\, ds$ e $\int_C o = \int_{g^{-1}(C)} g^\star o$. Calcule directamente $\int_C o \cdot o\, ds$ e $\int_{g^{-1}(C)} g^\star o$. (3)

Seja Ω um domínio regular em $\mathbb{R}^2$ e $\phi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^2. Designamos ϕ por (ϕ_u, ϕ_v).

b) Verifique que $\left[\frac{\phi}{||\phi||}\right]^\star o = \frac{1}{||\phi||^2} \cdot [\phi^\star o]$. (2)

Sugestão: $\left[\frac{\phi}{||\phi||}\right]^\star o = -\frac{\phi_v}{||\phi||}\, d\frac{\phi_u}{||\phi||} + \frac{\phi_u}{||\phi||}\, d\frac{\phi_v}{||\phi||}$. Ora, $d\frac{\phi_u}{||\phi||} = \frac{1}{||\phi||}\, d\phi_u + \phi_u\, d\frac{1}{||\phi||}$ e $d\frac{\phi_v}{||\phi||} = \frac{1}{||\phi||}\, d\phi_v + \phi_v\, d\frac{1}{||\phi||}$. *Não* calcule $d\frac{1}{||\phi||}$.

Portanto, $\left[\frac{\phi}{||\phi||}\right]^\star (-y\,dx + x\,dy) = \frac{-\phi_v\, d\phi_u + \phi_u\, d\phi_v}{\phi_u^2 + \phi_v^2} = \phi^\star \left(\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}\right)$.

c) Verifique que $d\left[\phi^\star \left(\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}\right)\right] = 0$. (2)

Suponha que ϕ não se anula sobre $\partial\Omega$. Seja $i = \int_{\partial\Omega} \frac{-\phi_v\, d\phi_u + \phi_u\, d\phi_v}{\phi_u^2 + \phi_v^2}$, onde $\partial\Omega$ tem orientação $\bar{o}$, induzida por n, a normal unitária exterior a Ω.

d) Se $i \neq 0$, então $\phi = 0$ para algum ponto de Ω. Justifique. (2)

Sugestão: Use o Teorema de Stokes.

e) Interprete i em termos do número de rotação. Justifique. (1)

Suponha agora que $\phi = \nabla\psi$, onde $\psi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2, e $\psi = c$ é uma representação cartesiana de $\partial\Omega$, para um certo $c \in \mathbb{R}$. A curvatura de $\partial\Omega$ é $k \stackrel{\triangle}{=} n^\star o \cdot \bar{o}$.

f) Calcule k em termos das derivadas de ψ. (1)

Análise Matemática IV

1º Teste - 4 de Maio de 96

Fís. e Matem.

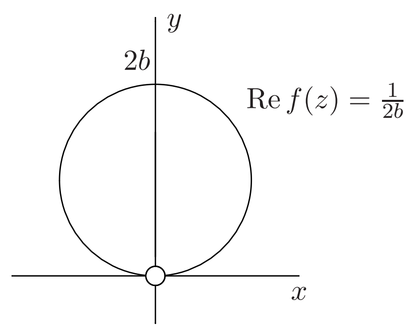
Resolução

1.

a) $f(z) = -\frac{i}{\bar{z}} = -\frac{i}{x-iy} = -\frac{i(x+iy)}{x^2+y^2} = \frac{y-ix}{x^2+y^2}$.
$(F_1(x,y), F_2(x,y)) = (\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2})$.

b) $f[f(z)] = f(-\frac{i}{\bar{z}}) = -\frac{i}{i/z} = -z$.

c) Se $z = re^{i\theta}$, então $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r}e^{i\theta}$. Sabemos também que uma transformação linear fraccionária transforma "circunferências"em "circunferências."A imagem da recta $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2b}$ por $\frac{1}{\bar{z}}$ é uma circunferência. A circunferência passa por zero e $2b$, e é simétrica em relação ao eixo dos x. A imagem da recta $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2b}$ por $\frac{i}{\bar{z}}$ é obtida rodando esta circunferência em torno da origem, no sentido directo, $\frac{\pi}{2}$ radianos.



A imagem da recta $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2b}$ por $\frac{i}{\bar{z}}$.

d) $g'(z) = u_x + iv_x$. $|g'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = u_x v_y - v_x u_y = \det DG(x,y)$.

e) Se $g = \bar{f}$, então $G = (u,v) = (F_1, -F_2)$, pelo que $\det DG(x,y) = -\det DF(x,y)$.
Note-se que $\bar{f}$ é analítica, já que $\bar{f}(z) = \frac{i}{z}$. Então $|(\bar{f})'(z)|^2 = |g'(z)|^2 = \det DG(x,y) = -\det DF(x,y)$.
Como $g'(z) = -\frac{i}{z^2}$, $|g'(z)|^2 = \frac{1}{|z|^4}$.

2.

a) $\int_C o \cdot o\, ds = \int_C (y^2 + x^2)\, ds = \int_C 1\, ds = 2\pi$.
$\int_{g^{-1}(C)} g^\star o = \int_0^{2\pi}(-\sin\theta\, d\cos\theta + \cos\theta\, d\sin\theta) = \int_0^{2\pi}(\sin^2\theta\, d\theta + \cos^2\theta\, d\theta) = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi$.

b) $\left[\frac{\phi}{||\phi||}\right]^\star o = -\frac{\phi_v}{||\phi||}\, d\frac{\phi_u}{||\phi||} + \frac{\phi_u}{||\phi||}\, d\frac{\phi_v}{||\phi||} = -\frac{\phi_v}{||\phi||^2}\, d\phi_u - \frac{\phi_v\phi_u}{||\phi||}\, d\frac{1}{||\phi||} + \frac{\phi_u}{||\phi||^2}\, d\phi_v + \frac{\phi_u\phi_v}{||\phi||}\, d\frac{1}{||\phi||} = \frac{1}{||\phi||^2} \cdot (-\phi_v\, d\phi_u + \phi_u\, d\phi_v) = \frac{1}{||\phi||^2} \cdot [\phi^\star o]$.

c) Como ϕ é de classe C^2, $d\left[\phi^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right)\right] = \phi^\star d\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right) = \phi^\star 0 = 0$.

d) Se ϕ nunca se anula em Ω, então $\omega = \frac{-\phi_v\,d\phi_u+\phi_u\,d\phi_v}{\phi_u^2+\phi_v^2}$ é uma forma fechada em Ω. Pelo Teorema de Stokes, $i = \int_{\partial\Omega}\omega = \iint_\Omega d\omega = 0$. (Se ϕ se anula em Ω, então ω não está definida em Ω.)

e) Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ uma parametrização de uma componente de $\partial\Omega$ compatível com $\bar{o}$ (isto é, tal que $\left(\frac{\alpha'}{||\alpha'||}\right)^\star = \bar{o}\circ\alpha$). (Nota: em rigor, $\alpha|_{]a,b[}$ é uma parametrização da componente em causa de $\partial\Omega$ com um ponto removido.) $i = \int_a^b \alpha^\star \frac{-\phi_v\,d\phi_u+\phi_u\,d\phi_v}{\phi_u^2+\phi_v^2} = \int_a^b \frac{-(\phi_v\circ\alpha)\,d(\phi_u\circ\alpha)+(\phi_u\circ\alpha)\,d(\phi_v\circ\alpha)}{(\phi_u\circ\alpha)^2+(\phi_v\circ\alpha)^2}$
$= \int_{\phi(\partial\Omega)} \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}$, pela definição de integral de linha, já que $\phi\circ\alpha$ é um caminho cujo contradomínio é $\phi(\partial\Omega)$.
i é o produto de 2π pelo número de rotação de $\phi(\partial\Omega)$ em torno de zero.

f) Designamos $\nabla\psi$ por (ψ_u, ψ_v). (Nota: Assim, índices em ψ designam derivadas parciais, enquanto índices em ϕ designam componentes.)
$n = \frac{\nabla\psi}{||\nabla\psi||}$, $\bar{o} = -\frac{\psi_v}{||\nabla\psi||}\,du + \frac{\psi_u}{||\nabla\psi||}\,dv$. Vamos supor que esta é a normal exterior. Se for a interior numa componente conexa de $\partial\Omega$, substitui-se ψ por $-\psi$ nessa componente.
Da alínea b), $n^\star o = \frac{1}{||\nabla\psi||^2}(-\psi_v\,d\psi_u + \psi_u d\psi_v)$
$= \frac{1}{||\nabla\psi||^2}(-\psi_v\psi_{uu}\,du - \psi_v\psi_{uv}\,dv + \psi_u\psi_{vu}\,du + \psi_u\psi_{vv}\,dv)$
$= \frac{1}{||\nabla\psi||^2}(-\psi_v\psi_{uu} + \psi_u\psi_{vu})du + \frac{1}{||\nabla\psi||^2}(-\psi_v\psi_{uv} + \psi_u\psi_{vv})dv.$
$n^\star o \cdot \bar{o} = \frac{\psi_v^2\psi_{uu} - 2\psi_u\psi_v\psi_{uv} + \psi_u^2\psi_{vv}}{||\nabla\psi||^3}$.

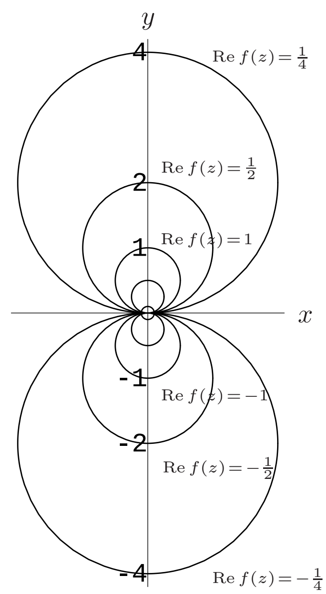
Análise Matemática IV

1º Teste - 4 de Maio de 96

Fís. e Matem.

Graficos Complementares

1.c)



A imagem das rectas $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2b}$ por $\frac{i}{\bar{z}}$ para $b = -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ e 2.

Análise Matemática IV

20 de Junho de 96

Fís. e Matem.

2º Teste –	Grupo 2	– 90 minutos
1º Exame –	Grupos 1 e 2	– 3 horas

Apresente os cálculos

1. Sejam a e $b > 0$. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\psi(u,v) = \frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)$, e $E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \psi(u,v) = \frac{1}{2}\}$, com a orientação induzida pela parametrização $g :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, definida por $g(\theta) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$.

***a)** Mostre que $g^\star(\nabla\psi)^\star\left(\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}\right) = \frac{ab}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}\,d\theta$. (2)

Fazendo $c = \frac{b}{a}$, obtém-se $\frac{ab}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}\,d\theta = \frac{2c}{c^2+1}\frac{1}{1+\frac{c^2-1}{c^2+1}\cos(2\theta)}\,d\theta$.

b) Seja $d \in \mathbb{R}$, $|d| < 1$. Usando o Teorema dos resíduos, mostre que $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+d\cos(2\theta)}\,d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-d^2}}$. (2.5)

***c)** Usando o resultado das alíneas anteriores, calcule $i = \int_E (\nabla\psi)^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right)$. (1.5)

***d)** Interpretando i em termos do número de rotação, confirme o valor que obteve na alínea anterior. (1)

e) Seja $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ e } |\operatorname{Re} z| \geq 1\}$. Mostre que se pode definir $\sqrt{\cdot}$ de modo a que a função $f : D \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \sqrt{1-z^2}$, seja analítica e $f(0) = 1$. Sugestão: Calcule a imagem de D por $z \mapsto (1-z^2)$. (2)

f) A fórmula $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+z\cos(2\theta)}\,d\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1-z^2}}$ é válida em D? Justifique. (1)

2.

a) Esboce o campo de direcções e as soluções da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+3y}{y}$. (2)

b) Seja $v = \frac{y}{x}$. Determine uma equação diferencial para v, resolva-a e determine, de forma implícita, as soluções da equação da alínea anterior. (2)

c) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine e^{At}. (2.5)

Considere o sistema $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Sejam x_0 e $y_0 \in \mathbb{R}$. Determine explicitamente a solução do sistema que verifica $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

d) Esboce o retrato de fase do sistema. (1)

e) Seja (x, y) uma solução do sistema. Determine para x uma equação diferencial de segunda ordem, linear e homogénea. (1.5)
Qual a solução dessa equação que verifica $x(0) = x_0$ e $x'(0) = y_0$?
Esboce as soluções que verificam $x(0) = 0$. Sugestão: Use a alínea anterior.

f) Considere a equação $z' = -4x + 6\sqrt{z}$, com condição inicial $z(x_0) = 0$. (1)
O Teorema de Picard garante unicidade de solução? Justifique.
Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, determine o número de soluções da equação. Sugestão: Faça uma mudança de variáveis.

Análise Matemática IV

1º Exame - 20 de Junho de 96

Fís. e Matem.

Resolução

1.

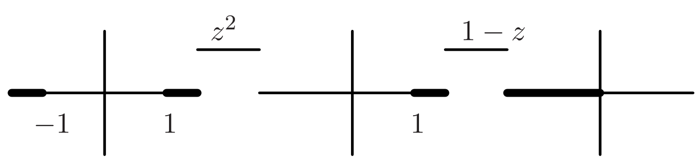
a) $\nabla\psi(u,v) = (\frac{u}{a^2}, \frac{v}{b^2})$. $\nabla\psi(g(\theta)) = (\frac{\cos\theta}{a}, \frac{\sin\theta}{b})$.
$g^\star(\nabla\psi)^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right) = (\nabla\psi\circ g)^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right) = \frac{-\frac{\sin\theta}{b}(-\frac{\sin\theta}{a})\,d\theta+\frac{\cos\theta}{a}(\frac{\cos\theta}{b})\,d\theta}{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}} =$
$\frac{ab}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\,d\theta$.

b) $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+d\cos(2\theta)}\,d\theta = \int_0^{4\pi}\frac{1}{1+d\cos\gamma}\frac{d\gamma}{2} = \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+d\cos\gamma}\,d\gamma$.
Fazendo $z = e^{i\gamma}$, obtém-se $\int_{|z|=1}\frac{1}{1+d(z+z^{-1})/2}\frac{dz}{iz} = \frac{2}{id}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2z/d+1} =$
$\frac{2}{id}\int_{|z|=1}\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$, onde $z_1 = \frac{-1+\sqrt{1-d^2}}{d}$ e $z_2 = \frac{-1-\sqrt{1-d^2}}{d}$. Note-se que $z_1z_2 = 1$ e $z_1+z_2 = -\frac{2}{d}$, pelo que $|z_1| < 1$ e $|z_2| > 1$. Pelo Teorema dos Resíduos, o integral vale $2\pi i\frac{2}{id}\frac{1}{z_1-z_2} = 2\pi i\frac{2}{id}\frac{1}{\frac{2}{d}\sqrt{1-d^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-d^2}}$.

c) Seja $d = \frac{c^2-1}{c^2+1}$. Note-se que $|d| < 1$.
$\int_E(\nabla\psi)^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right) = \int_{g^{-1}(E)} g^\star(\nabla\psi)^\star\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right) = \int_0^{2\pi}\frac{ab}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}\,d\theta$
$= \frac{2c}{c^2+1}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\frac{c^2-1}{c^2+1}\cos(2\theta)}\,d\theta = \frac{2c}{c^2+1}\frac{2\pi}{\sqrt{1-d^2}} = \frac{2c}{c^2+1}\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{(c^2-1)^2}{(c^2+1)^2}}} = 2\pi$.

d) $i = \int_{(\nabla\psi)(E)}\left(\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}\right) =$ nº de rotação de $(\nabla\psi)(E)$ em torno de zero $= 2\pi$.

e)



A imagem de D por $z \mapsto 1-z^2$.

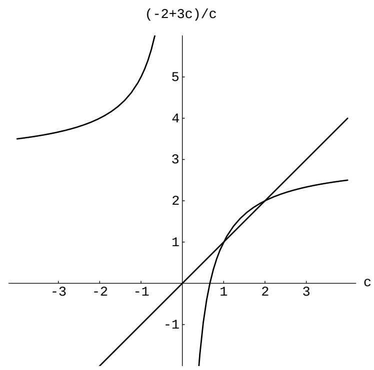
Escreva-se $w \in \mathbb{C}\setminus\{w\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} w = 0 \text{ e } \operatorname{Re} w \le 0\}$ como $w = re^{i\theta}$ com $-\pi < \theta < \pi$. Defina-se $\sqrt{w} \stackrel{\triangle}{=} r^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Então, a função $f : D \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \sqrt{1-z^2}$, é analítica e $f(0) = \sqrt{1e^{i\,0}} = 1$.

f) Seja $g : D \to \mathbb{C}$, definida por $g(z) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+z\cos(2\theta)}\,d\theta$. A função g está bem definida, já que se $\theta\in[0,2\pi]$ e $z \in D$, então $1+z\cos(2\theta) \neq 0$. Além disso g é analítica, porque $\frac{\partial g}{\partial\bar z} = \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{1}{1+z\cos(2\theta)}\,d\theta = 0$.
A função $h : D \to \mathbb{C}$, definida por $h(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-z^2}}$ é analítica, pela alínea anterior.

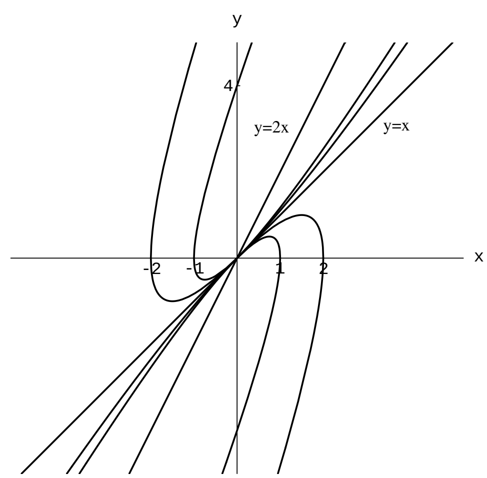
Concluímos que ambas as funções g e h são analíticas. As duas funções são iguais, porque coincidem num segmento de recta.
Observação: Portanto, $\sqrt{1-z^2} = 2\pi \Big/ \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+z\cos(2\theta)}\, d\theta$.

2.

a) Seja $c = \frac{y}{x}$. Então $\frac{-2x+3y}{y} = \frac{-2+3c}{c}$. De $\frac{-2+3c}{c} = c$ tira-se $c = 1$ ou $c = 2$. $c = \frac{2}{3}$ implica $\frac{-2+3c}{c} = 0$. $c = 0$ implica $\frac{-2+3c}{c} = \infty$. $c = \infty$ implica $\frac{-2+3c}{c} = 3$. $\frac{-2+3c}{c} < 0$ se $0 < c < \frac{2}{3}$.



O gráfico de $c \mapsto \frac{-2+3c}{c}$.



Esboço das soluções da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x+3y}{y}$.

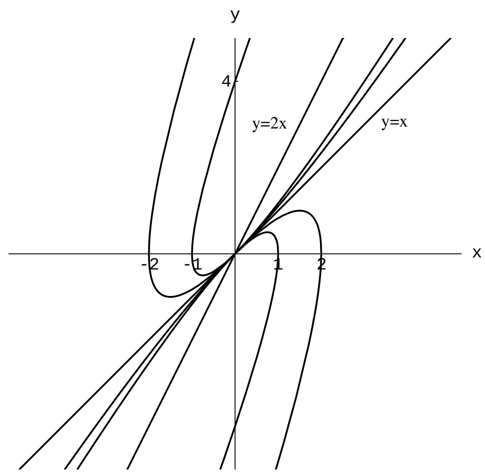
b) $y = xv$, logo $y' = v + xv'$.
Temos $v + xv' = -\frac{2}{v} + 3$, ou seja, $xv' = -\frac{v^2-3v+2}{v}$. Esta equação é separável. $v = 1$ e $v = 2$ são soluções da equação. Se $v \neq 1$ e $v \neq 2$, vem $-\frac{v}{v^2-3v+2}v' = \frac{1}{x}$, i.e., $\left(\frac{1}{v-1} - \frac{2}{v-2}\right) v' = \frac{1}{x}$, ou $\ln \frac{|v-1|}{(v-2)^2} = \ln(c|x|)$, com $c \in \mathbb{R}^+$. Finalmente, $\frac{v-1}{(v-2)^2} = cx$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Em termos de x e y, $\frac{y-x}{(y-2x)^2} = c$ com $c \in \mathbb{R}$ ou $y = 2x$.

c) Os valores próprios de A são 1 e 2. Um vector próprio associado a 1 é $(1,1)$ e um vector próprio associado a 2 é $(1,2)$. $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & -e^t + e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$.

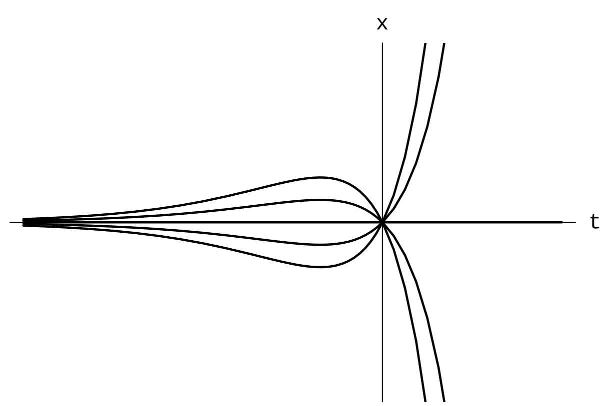
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} x_0(2e^t - e^{2t}) + y_0(-e^t + e^{2t}) \\ x_0(2e^t - 2e^{2t}) + y_0(-e^t + 2e^{2t}) \end{bmatrix}$.

d)



O retrato de fase do sistema.

e) Tem-se $x' = y$ e $y' = -2x + 3y$. Logo $x'' = y' = -2x + 3y = -2x + 3x'$, ou seja, $x'' - 3x' + 2x = 0$.
Da alínea anterior, é $x(t) = x_0(2e^t - e^{2t}) + y_0(-e^t + e^{2t})$ a solução da equação que verifica $x(0) = x_0$ e $x'(0) = y_0$.
Usando o retrato de fase do sistema, é imediato o



Esboço das soluções que verificam $x(0) = 0$.

$$x(t) = y_0(-e^t + e^{2t}),\ y_0 \in \mathbb{R}.$$

f) Trata-se de uma equação da forma $z' = f(x, z)$, com condição inicial $z(x_0) = 0$ e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, z) = -4x + 6\sqrt{z}$.
Verifiquemos que $f(x_0, \cdot)$ não é localmente Lipschitziana em torno de $(x_0, 0)$. $f(x_0, z_1) - f(x_0, z_2) = 6\sqrt{z_1} - 6\sqrt{z_2}$. Em particular, $f(x_0, z_1) - f(x_0, 0) = 6\sqrt{z_1}$. Qualquer que seja $L > 0$ e $\delta > 0$, existe $0 < z_1 < \delta$ tal que $|f(x_0, z_1) - f(x_0, 0)| > L|z_1 - 0|$. De facto, basta tomar $0 < z_1 < (\frac{6}{L})^2$. Isto prova que $f(x_0, \cdot)$ não é localmente Lipschitziana em torno de $(x_0, 0)$.
Logo, o Teorema de Picard não é aplicável com a condição inicial $z(x_0) = 0$.
Seja $y = \sqrt{z}$. Note-se que $y \geq 0$. Segue que $z = y^2$ e $z' = 2yy'$. Em termos de y, a equação é $2yy' = -4x + 6y$, ou seja, a equação acima, $yy' = -2x + 3y$. Portanto, desde que $y(x) \geq 0$, as soluções de $z' = -4x + 6\sqrt{z}$ são definidas por $z(x) = y^2(x)$, onde y é como nas alíneas **a)** e **b)**.
Observando o esboço da alínea **a)**, conclui-se que se $x_0 < 0$, então a equação tem uma única solução, definida em $[x_0, +\infty[$. Se $x_0 = 0$, então a equação tem infinitas soluções. Se $x_0 > 0$, então a equação tem uma única solução, definida em $[0, x_0]$.
Note-se que $z'(x_0) = -4x_0$.

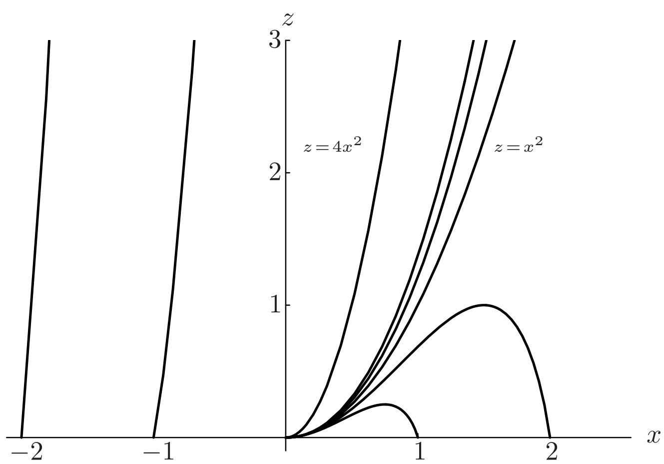
Análise Matemática IV

1º Exame - 20 de Junho de 96

Fís. e Matem.

Graficos Complementares

2.f)



Esboço das soluções da equação $z' = -4x + 6\sqrt{z}$.

Análise Matemática IV

2º Exame - 2 de Julho de 96

Fís. e Matem.

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Sejam g e $l \in \mathbb{R}^+$.

a) Determine a solução da equação $\frac{d\gamma}{d\theta} = -gl^3 \frac{\sin\theta}{\gamma}$ que verifica a condição inicial $\gamma(\theta_0) = \gamma_0$, com $\gamma_0 \neq 0$. (2)

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \frac{1}{l^2}\gamma, \\ \dot{\gamma} &= -gl\sin\theta, \end{cases}$$

com condição inicial $(\theta(0), \gamma(0)) = (\theta_0, \gamma_0) \in \mathbb{R}^2$.

b) O sistema tem uma e uma só solução. Justifique. (1.5)

Seja $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $H(\theta, \gamma) = \frac{1}{2l^2}\gamma^2 - gl\cos\theta$.

c) Verifique que H é constante ao longo da solução do sistema. (1.5)

d) Mostre que existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\gamma(t)| \leq c$, para todo o $t \in \mathbb{R}$. (1.5)

e) A solução do sistema está definida em $\mathbb{R}$. Justifique. Sugestão: Basta provar que $||(\theta, \gamma)||$ não tende para infinito em tempo finito. (1.5)

f) Esboce o retrato de fase do sistema. Sugestão: Use a alínea **c)**. (2)

2. Sejam g e $l \in \mathbb{R}^+$. Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $H(\theta, \gamma) = \frac{1}{2l^2}\gamma^2 - gl\cos\theta$, e η a forma-1 definida por $\eta(\theta, \gamma) = \gamma\, d\theta$.

*__a)__ Calcule dH e $d\eta$. (2)

Seja $u \in \mathbb{R}^2$ e $v_H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $v_H(\theta, \gamma) = (\frac{1}{l^2}\gamma, -gl\sin\theta)$.

*__b)__ Verifique que $dH(u) = d\eta(u, v_H)$. (2)
Verifique que $dH(v_H) = 0$.

Considere o sistema $\frac{d}{dt}(\theta, \gamma) = v_H(\theta, \gamma)$, ou seja,

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \frac{1}{l^2}\gamma, \\ \dot{\gamma} &= -gl\sin\theta, \end{cases}$$

com condição inicial $(\theta(0), \gamma(0)) = (\theta_0, \gamma_0) \in \mathbb{R}^2$. O sistema tem uma e uma só solução, e a solução está definida em $\mathbb{R}$. Designe-se a solução do sistema no instante t por $[\theta(\theta_0, \gamma_0)(t), \gamma(\theta_0, \gamma_0)(t)]$. Para $t \in \mathbb{R}$, fixo mas arbitrário, designe- -se também por $(\theta, \gamma)_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função $(\theta_0, \gamma_0) \mapsto [\theta(\theta_0, \gamma_0)(t), \gamma(\theta_0, \gamma_0)(t)]$. Pode-se provar que $(\theta, \gamma)_t$ é de classe C^1.

c) Verifique que $\left.\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)}\right|_{t=0} = 1$ e $\frac{d}{dt}\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} \equiv 0$. Logo, $\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} \equiv 1$. (1.5)

d) A função $(\theta,\gamma)_t$ é bijectiva, tem derivada injectiva e tem inversa contínua. Justifique. (1)

Portanto, a função $(\theta,\gamma)_t$ é uma parametrização de $\mathbb{R}^2$.

***e)** Verifique que $(\theta,\gamma)_t^\star\, d\eta = d\eta$. Sugestão: Use a alínea **c)**. (1)

f) A função $(\theta,\gamma)_t$ preserva áreas. Justifique. (1)

Seja Ω um domínio regular em $\mathbb{R}^2$.

***g)** Usando o Teorema de Stokes, verifique que $\int_{(\theta,\gamma)_t(\partial\Omega)} \eta = \int_{\partial\Omega} \eta$. (1.5)

Análise Matemática IV

2º Exame - 2 de Julho de 96

Fís. e Matem.

Resolução

1.

a) $\gamma\frac{d\gamma}{d\theta} = -gl^3\sin\theta$,
$\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma_0^2}{2} = gl^3\cos\theta - gl^3\cos\theta_0$,
$\gamma^2 = 2gl^3\cos\theta - 2gl^3\cos\theta_0 + \gamma_0^2$,
$$\gamma = \begin{cases} +\sqrt{2gl^3\cos\theta - 2gl^3\cos\theta_0 + \gamma_0^2}\,, & \text{se } \gamma_0 > 0, \\ -\sqrt{2gl^3\cos\theta - 2gl^3\cos\theta_0 + \gamma_0^2}\,, & \text{se } \gamma_0 < 0. \end{cases}$$

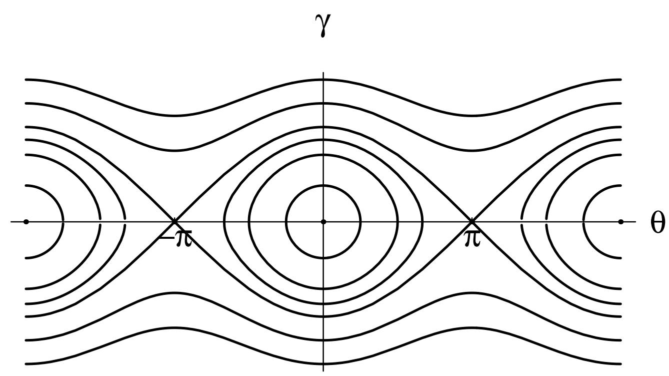
b) O Teorema de Picard implica que o sistema tem uma e uma só solução, uma vez que a função $(t,(\theta,\gamma)) \mapsto (\frac{1}{l^2}\gamma, -gl\sin\theta)$ é de classe C^1.

c) $\frac{d}{dt}H(\theta(t),\gamma(t)) = \frac{\partial H}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial H}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = gl\sin\theta \times \frac{\gamma}{l^2} + \frac{\gamma}{l^2} \times (-gl\sin\theta) = 0$, logo $H(\theta(t),\gamma(t))$ é constante.

d) A partir da alínea **a)**, ou a partir da alínea **c)**, $|\gamma| \leq \sqrt{4gl^3 + \gamma_0^2} \stackrel{\triangle}{=} c$.

e) $|\gamma| \leq c$ implica $|\dot\theta| \leq \frac{c}{l^2}$. Logo, $|\theta(t)| \leq \frac{c}{l^2}|t| + \bar{c}$. Como $|\gamma(t)| \leq c$, conclui- -se que $||(\theta,\gamma)||$ não tende para infinito em tempo finito.
Por outro lado, o domínio de $(t,(\theta,\gamma)) \mapsto (\frac{1}{l^2}\gamma, -gl\sin\theta)$ é $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$.
Logo, a solução do sistema está definida em $\mathbb{R}$.

f) Considere-se o conjunto $C = \{(\theta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 : H(\theta,\gamma) = H(\theta_0,\gamma_0)\} = \{(\theta,\gamma) \in \mathbb{R}^2 : \gamma = \pm\sqrt{2}\,l\sqrt{gl\cos\theta + H(\theta_0,\gamma_0)}\,\}$.
C é simétrico em relação ao eixo dos θ's e em relação ao eixo dos γ's.
Se $(\theta,\gamma) \in C$, então $(\theta + 2k\pi, \gamma) \in C$, k inteiro.
$gl\cos\theta + H(\theta_0,\gamma_0) > 0$ sse $\cos\theta > -\frac{1}{gl}H(\theta_0,\gamma_0)$. Note-se que $H(\theta_0,\gamma_0) \geq -gl$.
i) Se $H(\theta_0,\gamma_0) > gl$, então $gl\cos\theta + H(\theta_0,\gamma_0) > 0$.
ii) Se $H(\theta_0,\gamma_0) = gl$, então $\gamma = \pm\sqrt{2}\,l\sqrt{gl(\cos\theta + 1)} = \pm 2g^{\frac{1}{2}}l^{\frac{3}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$.
iii) Se $-gl < H(\theta_0,\gamma_0) < gl$, então $gl\cos\theta + H(\theta_0,\gamma_0) \geq 0$ sse $\cos\theta \geq -H(\theta_0,\gamma_0)/gl$.
iv) Se $H(\theta_0,\gamma_0) = -gl$, então $gl\cos\theta + H(\theta_0,\gamma_0) \geq 0$ sse $\theta = 2k\pi$, k inteiro.
Por outro lado, o campo vectorial $(\frac{1}{l^2}\gamma, -gl\sin\theta)$ anula-se apenas nos pontos $(k\pi, 0)$, k inteiro. Se $\gamma > 0$, então a primeira componente do campo é positiva, e se $\gamma < 0$, então a primeira componente do campo é negativa.
Em alternativa, se $\gamma > 0$, então $\dot\theta > 0$, e se $\gamma < 0$, então $\dot\theta < 0$.
Os pontos de equilíbrio do sistema são $(k\pi, 0)$, k inteiro, e o retrato de fase é:



O retrato de fase do sistema.

2.

a) $dH = gl\sin\theta\, d\theta + \frac{\gamma}{l^2}\, d\gamma$.
$d\eta = d\gamma \wedge d\theta$.

b) $dH(u_1, u_2) = gl\sin\theta\, u_1 + \frac{\gamma}{l^2}\, u_2$.

$d\eta(u, v_H) = d\gamma \wedge d\theta\,((u_1,u_2),(\frac{1}{l^2}\gamma, -gl\sin\theta)) = \begin{vmatrix} u_2 & u_1 \\ -gl\sin\theta & \frac{\gamma}{l^2} \end{vmatrix} =$
$gl\sin\theta\, u_1 + \frac{\gamma}{l^2}\, u_2$.

$dH(v_H) = d\eta(v_H, v_H) = 0$, porque, sendo $d\eta$ uma forma, $d\eta$ é alternante.

c) $\left.\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)}\right|_{t=0} = \frac{\partial(\gamma,\theta)_0}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} = \frac{\partial(\gamma_0,\theta_0)}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} = 1$.

$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_0}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0} - \frac{\partial\gamma}{\partial\theta_0}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_0}\right) = \frac{\partial\dot\gamma}{\partial\gamma_0}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0} + \frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_0}\frac{\partial\dot\theta}{\partial\theta_0} - \frac{\partial\dot\gamma}{\partial\theta_0}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_0} - \frac{\partial\gamma}{\partial\theta_0}\frac{\partial\dot\theta}{\partial\gamma_0} =$
$-gl\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_0}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0} + \frac{1}{l^2}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_0}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta_0} + gl\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_0} - \frac{1}{l^2}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta_0}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_0} = 0$.

Logo, $\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} \equiv 1$.

(No enunciado afirma-se que $(\theta,\gamma)_t$ é C^1. As derivadas $\frac{\partial\dot\theta}{\partial\theta_0}$, $\frac{\partial\dot\theta}{\partial\gamma_0}$, $\frac{\partial\dot\gamma}{\partial\theta_0}$ e $\frac{\partial\dot\gamma}{\partial\gamma_0}$ existem e são contínuas, porque $\dot\theta = \frac{\gamma}{l^2}$ e $\dot\gamma = -gl\sin\theta$ e porque $(\theta,\gamma)_t$ é C^1. Portanto, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial\theta_0}$, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial\gamma_0}$, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta_0}$ e $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_0}$ também existem. Além disso, pode-se trocar a ordem das derivadas.)

d) Obviamente, a inversa de $(\theta,\gamma)_t$ é $(\theta,\gamma)_{-t}$. Segue-se que $(\theta,\gamma)_t$ é bijectiva.
A inversa é C^1, porque $(\theta,\gamma)_t$ é C^1, e em particular contínua.
A derivada de $(\theta,\gamma)_t$ é injectiva porque o determinante da derivada é $\frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)} = 1 \neq 0$.

e) $(\theta,\gamma)_t^\star\, d\eta = d\gamma(\theta_0,\gamma_0) \wedge d\theta(\theta_0,\gamma_0) = \frac{\partial(\gamma,\theta)_t}{\partial(\gamma_0,\theta_0)}\, d\gamma_0 \wedge d\theta_0 = d\gamma_0 \wedge d\theta_0 = d\eta$.

f) $(\theta,\gamma)_t$ é uma transformação de coordenadas em $\mathbb{R}^2$. Seja S um conjunto cuja função característica é integrável em $\mathbb{R}^2$. Usando o Teorema de Mudança de Variáveis de Integração, a Área de $S = \iint_S d\theta d\gamma =$

$\iint_{(\theta,\gamma)_{-t}(S)} \left|\frac{\partial(\theta,\gamma)}{\partial(\theta_0,\gamma_0)}\right| d\theta_0 d\gamma_0 = \iint_{(\theta,\gamma)_{-t}(S)} d\theta_0 d\gamma_0 =$ Área de $(\theta,\gamma)_{-t}(S)$.

Em alternativa, a Área de $S = \iint_S d\theta \wedge d\gamma = \iint_{(\theta,\gamma)_{-t}(S)} (\theta,\gamma)_t^\star \, d\theta \wedge d\gamma = \iint_{(\theta,\gamma)_{-t}(S)} d\theta_0 \wedge d\gamma_0 =$ Área de $(\theta,\gamma)_{-t}(S)$.

g) $\int_{(\theta,\gamma)_t(\partial\Omega)} \eta = \int_{\partial\Omega} (\theta,\gamma)_t^\star \, \eta = \int_\Omega d(\theta,\gamma)_t^\star \, \eta = \int_\Omega (\theta,\gamma)_t^\star \, d\eta = \int_\Omega d\eta = \int_{\partial\Omega} \eta$.

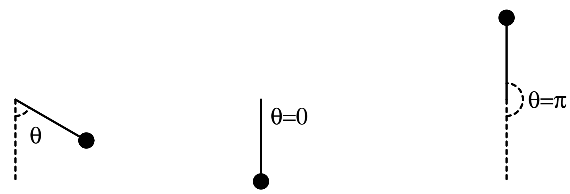
Análise Matemática IV

2º Exame - 2 de Julho de 96

Fís. e Matem.

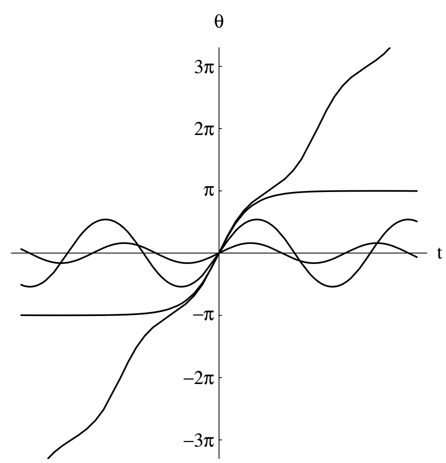
Graficos Complementares

H é a energia total de um pêndulo de massa unitária, sendo a energia total a soma da energia cinética, $\frac{1}{2l^2}\gamma^2$, com a energia potencial, $-gl\cos\theta$.



Pêndulo.

l é o comprimento do pêndulo, g a aceleração da gravidade e γ é o momento angular do pêndulo, pelo que $\gamma = I\omega = l^2 m\dot{\theta} = l^2\dot{\theta}$, ou seja, $\dot{\theta} = \frac{1}{l^2}\gamma$.
De $\dot{\theta} = \frac{1}{l^2}\gamma$ e $\dot{\gamma} = -gl\sin\theta$, segue $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$. Os gráficos de quatro soluções de $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$, com $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) > 0$, representam-se na figura seguinte.



$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$, com $\theta(0) = 0$ e $\dot{\theta}(0) > 0$.

A energia da solução que verifica $\lim_{|t|\to+\infty} |\theta(t)| = \pi$ é gl. Neste caso, $\frac{1}{2l^2}[l^2\dot{\theta}(0)]^2 - gl\cos 0 = gl$, ou seja, $\dot{\theta}(0) = 2\sqrt{\frac{g}{l}}$.
Sugestão: Interprete fisicamente esta figura e o retrato de fase da alínea **1.f)**.

Análise Matemática IV

Exame de 2ª Época - 20 de Julho de 96

Fís. e Matem.

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Sejam a, b e $c \in \mathbb{R}$. Considere a função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $H(x,y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$, e o campo vectorial $v_H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $v_H = (\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x})$. Seja $u \in \mathbb{R}^2$ e ω a forma-2 definida por $\omega = dx \wedge dy$.

*__a)__ Verifique que $dH(u) = \omega(v_H, u)$. (2)
Verifique que $dH(v_H) = 0$.

Considere o sistema $\frac{d}{dt}(x,y) = v_H(x,y)$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ com } A = \begin{bmatrix} b & c \\ -a & -b \end{bmatrix}.$$

Como sabe, a solução que satisfaz $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ é

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Designe-se por $[x(x_0,y_0)(t), y(x_0,y_0)(t)]$ o valor desta solução no instante t. Para $t \in \mathbb{R}$, fixo mas arbitrário, designe-se também por $(x,y)_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função $(x_0,y_0) \mapsto [x(x_0,y_0)(t), y(x_0,y_0)(t)]$.

b) $\frac{\partial(x,y)_t}{\partial(x_0,y_0)} = \det e^{At}$. Justifique. (2)

Designem-se por λ_1 e λ_2 os valores próprios de A. Como sabe, $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$.

c) Prove que $\det e^{At} = e^{\operatorname{tr} A\, t} = 1$. Sugestão: Use $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$, mas não calcule e^{At}. (1.5)

d) Calcule λ_1 e λ_2. (1.5)
Verifique que se μ é valor próprio da e^{At}, então também $\bar{\mu}$, $1/\mu$ e $1/\bar{\mu}$ são valores próprios de e^{At}.

*__e)__ Verifique que $(x,y)_t^\star\, \omega = \omega$. (1.5)

Sejam k e $m \in \mathbb{R}^+$. Considere $a = k$, $b = 0$ e $c = \frac{1}{m}$.

f) Esboce o retrato de fase do sistema. (2)

g) Determine uma equação diferencial de segunda ordem, linear e homogénea, para x. (1.5)
Qual a solução dessa equação que verifica $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$?

2. Seja $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = t, \text{ com } t \in [-1,1]\}$. Seja C um contorno simples e fechado em D, que dá uma volta em torno da origem, no sentido directo.

a) Mostre que $\int_C \frac{-2w}{1-w^2}\, dw = 4\pi i$. (2)

Seja $f : D \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = i \exp\left[\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{-2w}{1-w^2}\, dw\right]$, onde γ é um contorno em D que vai de $\sqrt{2}$ a z.

b) Mostre que, de facto, f está bem definida, isto é, que não depende de γ. (2)

c) A função f é analítica. Justifique. Sugestão: Seja $z_0 \in D$ e B uma bola aberta, de centro em z_0, contida em D. Fixe-se um contorno em D de $\sqrt{2}$ a z_0. Para $z \in B$, escolha para γ a concatenação do contorno de $\sqrt{2}$ a z_0 com um contorno em B, de z_0 a z. Prove que f é diferenciável em z_0. (1.5)

d) Mostre que $z \mapsto f^2(z)/(1-z^2)$ é constante. (1.5)
Verifique que o valor da constante é 1.

Portanto, $f(z) = \sqrt{1-z^2}$.
Seja $\tilde{D} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = t + i(1-t^2), \text{ com } t \in [-1,1]\}$. Seja $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{C}$, definida por $\tilde{f}(z) = i \exp\left[\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{-2w}{1-w^2}\, dw\right]$, onde γ é um contorno em $\tilde{D}$ que vai de $\sqrt{2}$ a z.

e) Determine a relação entre f e $\tilde{f}$. (1)

Análise Matemática IV

Exame de 2ª Época - 20 de Julho de 96

Fís. e Matem.

Resolução

1.

a) $dH = \frac{\partial H}{\partial x}\,dx + \frac{\partial H}{\partial y}\,dy = (ax+by)\,dx + (bx+cy)\,dy.$
$dH(u) = \frac{\partial H}{\partial x}u_1 + \frac{\partial H}{\partial y}u_2 = (ax+by)u_1 + (bx+cy)u_2.$
$v_H(x,y) = (\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}) = (bx+cy, -ax-by).$
$\omega(v_H,u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial y} & -\frac{\partial H}{\partial x} \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial H}{\partial x}u_1 + \frac{\partial H}{\partial y}u_2 = (ax+by)u_1 + (bx+cy)u_2.$
$dH(v_H) = \omega(v_H,v_H) = 0$, porque, sendo ω uma forma, ω é alternante.
Em alternativa, $dH(v_H) = (\frac{\partial H}{\partial x}\,dx + \frac{\partial H}{\partial y}\,dy)\,(\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}) = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x} = 0.$

b) A função $(x,y)_t$, definida por $(x_0,y_0) \mapsto (x(t),y(t))$, é uma transformação linear representada pela matriz e^{At}. Por definição, o Jacobiano desta transformação é o determinante de e^{At}.
Em alternativa, $\begin{bmatrix} \frac{\partial x(t)}{\partial x_0} & \frac{\partial x(t)}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y(t)}{\partial x_0} & \frac{\partial y(t)}{\partial y_0} \end{bmatrix} = e^{At}$. Logo, $\frac{\partial(x,y)_t}{\partial(x_0,y_0)} = \det e^{At}$.

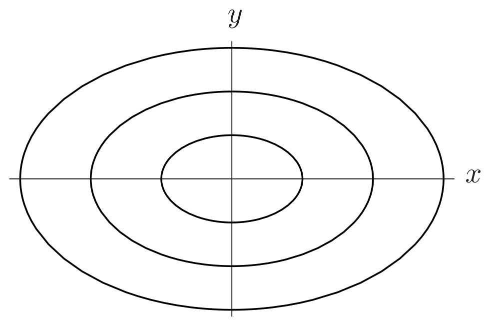
c) De $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$, segue $\det e^{At} = \det S \det e^{Jt} \det S^{-1} = \det e^{Jt} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \star \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t} = e^{\operatorname{tr} A\, t}.$
A segunda igualdade é imediata, já que $\operatorname{tr} A = 0$.

d) O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 - b^2 + ac$.
$\lambda_1 = \sqrt{b^2 - ac}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{b^2-ac} = -\lambda_1$.
(Nota: De $\operatorname{tr} A = 0$ também se conclui $\lambda_2 = -\lambda_1$.)
Os valores próprios de e^{At} são $\mu_1 = e^{\lambda_1 t}$ e $\mu_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{-\lambda_1 t}$.
$1/\mu_1 = \mu_2$ (e $1/\mu_2 = \mu_1$).
A matriz e^{At} é real, porque A é real. Logo, o polinómio característico de e^{At} tem coeficientes reais. Conclui-se que se μ é valor próprio de e^{At}, então também $\bar\mu$ é valor próprio de e^{At}.
Já verificámos que se μ é valor próprio da e^{At}, então também $\bar\mu$ e $1/\mu$ são valores próprios de e^{At}. Portanto, $1/\bar\mu$ é valor próprio de e^{At}.

e) $(x,y)_t^\star\,\omega = (\frac{\partial x}{\partial x_0}\,dx_0 + \frac{\partial x}{\partial y_0}\,dy_0) \wedge (\frac{\partial y}{\partial x_0}\,dx_0 + \frac{\partial y}{\partial y_0}\,dy_0) = \frac{\partial(x,y)_t}{\partial(x_0,y_0)}\,dx_0 \wedge dy_0 = \det e^{At}\,\omega = \omega.$

f) $H(x,y) = \frac{1}{2}(kx^2 + \frac{1}{m}y^2).$
$$\begin{cases} \dot x &= \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{1}{m}y, \\ \dot y &= -\frac{\partial H}{\partial x} &= -kx. \end{cases}$$

H é constante ao longo das soluções do sistema. De facto, $\frac{d}{dt}H(x,y) = dH(\dot{x},\dot{y}) = dH(v_H) = 0$.
As curvas $H = \frac{c}{2}$, $c \in \mathbb{R}^+$, são elipses que intersectam o eixo dos x's em $\pm\sqrt{\frac{c}{k}}$ e o eixo dos y's em $\pm\sqrt{cm}$.
Por outro lado, o campo vectorial $(\frac{1}{m}y, -kx)$ anula-se apenas no ponto $(0,0)$. Se $y > 0$, então a primeira componente do campo é positiva, e se $y < 0$, então a primeira componente do campo é negativa.
Em alternativa, se $y > 0$, então $\dot{x} > 0$, e se $y < 0$, então $\dot{x} < 0$.
O único ponto de equilíbrio do sistema é $(0,0)$.
Vamos supor que $\frac{1}{k} > m$. O retrato de fase é:



O retrato de fase do sistema.

g) De $\dot{x} = \frac{1}{m}y$ e $\dot{y} = -kx$, segue $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$.
A solução geral de $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ é $x(t) = \alpha\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t) + \beta\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t)$, α e $\beta \in \mathbb{R}$.
A solução que verifica $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ é $x(t) = x_0\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t) + \dot{x}_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t)$.

2.

a) $\int_C \frac{-2w}{1-w^2}\,dw = \int_C \left(\frac{1}{w-1} + \frac{1}{w+1}\right)dw = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i$.

b) Seja $z_0 \in D$. Sejam γ_1 e γ_2 dois contornos em D de $\sqrt{2}$ a z_0. $\int_{\gamma_1} \frac{-2w}{1-w^2}\,dw - \int_{\gamma_2} \frac{-2w}{1-w^2}\,dw = \int_C \frac{-2w}{1-w^2}\,dw$, onde C é um contorno fechado em D. Pela alínea anterior a diferença vale $4k\pi i$, onde k é um inteiro, igual ao número de voltas que $\gamma_1 - \gamma_2$ dá em torno de zero, no sentido directo.
$i\exp\left[\frac{1}{2}\int_{\gamma_1} \frac{-2w}{1-w^2}\,dw\right] = i\exp\left[\frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \frac{-2w}{1-w^2}\,dw + 2k\pi i\right] = i\exp\left[\frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \frac{-2w}{1-w^2}\,dw\right]$.

c) Sigamos a sugestão. Suponhamos ainda que o fecho de B não contém os pontos -1 e 1. Provemos que a função $g : B \to \mathbb{C}$, definida por $g(z) = \int_\gamma \frac{-2w}{1-w^2}\,dw$ é uma função diferenciável em z_0. Seja $z \in B$. Como $w \mapsto \frac{-2w}{1-w^2}$ é analítica em B, $g(z) - g(z_0) = \int_{z_0}^{z} \frac{-2w}{1-w^2}\,dw$, onde o integral é calculado ao longo de qualquer contorno, δ, em B, de z_0 a z.

Escolha-se para δ o segmento de recta de z_0 a z, $w(t) = z_0 + t(z - z_0)$, $t \in [0,1]$. Tem- -se $g(z) - g(z_0) = \int_0^1 \frac{-2w(t)}{1-w^2(t)}\,dt\,(z - z_0)$. Portanto, $\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \int_0^1 \frac{-2w(t)}{1-w^2(t)}\,dt$. Como o fecho de B não contém os pontos -1 e 1, o módulo da função $w \mapsto \frac{-2w}{1-w^2}$ é limitado, em B, por uma constante. Por outro lado, $w(t) \to z_0$, quando $z \to z_0$. Logo, $\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \int_0^1 \frac{-2z_0}{1-z_0^2}\,dt = \frac{-2z_0}{1-z_0^2}$.
A função f é diferenciável em z_0, porque é a composição de g com uma função diferenciável.

d) Da alínea anterior sabemos que $g'(z) = \frac{-2z}{1-z^2}$. Por consequência, $f'(z) = f(z)\,\frac{-z}{1-z^2}$.
$f^2(z)/(1-z^2)$ é constante porque $\frac{d}{dz}\frac{f^2}{1-z^2} = \frac{2ff'(1-z^2)-f^2(-2z)}{(1-z^2)^2} = 2f\,\frac{f'(1-z^2)+zf}{(1-z^2)^2} = 0$.
O valor da constante é 1 porque $f^2(\sqrt{2})/(1-(\sqrt{2})^2) = i^2/(-1) = 1$.

e) Seja $P = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1 \text{ e } 0 < \operatorname{Im} z < 1 - (\operatorname{Re} z)^2\}$.
Sejam γ um contorno em D que vai de $\sqrt{2}$ a z, e $\tilde{\gamma}$ um contorno em $\tilde{D}$ que vai de $\sqrt{2}$ a z.
Se $z_0 \notin P$, então $\tilde{f}(z_0) = f(z_0)$, porque podemos escolher $\tilde{\gamma} = \gamma$.
Seja $z_0 \in P$. Escolha-se o contorno γ, de $\sqrt{2}$ a z_0, contido no semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Escolha-se o contorno $\tilde{\gamma}$, de $\sqrt{2}$ a z_0, contido em $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \leq 0\} \cup P$.
$\int_\gamma \frac{-2w}{1-w^2}\,dw - \int_{\tilde{\gamma}} \frac{-2w}{1-w^2}\,dw = \int_C \frac{-2w}{1-w^2}\,dw$, onde C é um contorno fechado, que dá uma volta em torno de 1, no sentido directo. Como $\int_{|z-1|=1} \frac{-2w}{1-w^2}\,dw$ $= \int_{|z-1|=1} \left(\frac{1}{w-1} + \frac{1}{w+1}\right) dw = 2\pi i$, resulta que $f(z_0) = i\exp\left[\frac{1}{2}\int_\gamma \frac{-2w}{1-w^2}\,dw\right]$ $= i\exp\left[\frac{1}{2}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{-2w}{1-w^2}\,dw + \pi i\right] = -\tilde{f}(z_0)$.

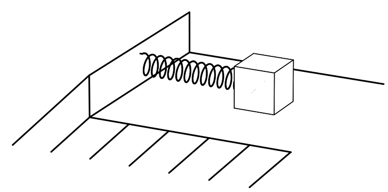
Análise Matemática IV

Exame de 2ª Época - 20 de Julho de 96

Fís. e Matem.

Graficos Complementares

Sejam k e $m \in \mathbb{R}^+$. Considere-se uma mola. Suponhamos que a massa da extremidade da mola é m e a constante de restituição da mola é k. Seja x a distância da extremidade da mola ao ponto de equilíbrio da extremidade da mola. A função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $H(x,y) = \frac{1}{2}(kx^2 + \frac{1}{m}y^2)$, é a energia total da mola, sendo a energia total a soma da energia cinética, $\frac{1}{2m}y^2$, com a energia potencial, $\frac{k}{2}x^2$.



Mola.

y é o momento linear do pêndulo, pelo que $y = mv = m\dot{x}$, ou seja, $\dot{x} = \frac{1}{m}y$.
Sugestão: Interprete fisicamente o retrato de fase da alínea **1.f)**.

Análise Matemática IV

Exame de Época Especial - 30 de Setembro de 96

Fís. e Matem.

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$, aberto conexo, e $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Escrevemos $f(re^{i\theta}) = g(r, \theta)$, onde r e $\theta \in \mathbb{R}$.

- **a)** Como sabe, as equações de Cauchy-Riemann na forma polar escrevem-se $\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{i}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}$. Deduza estas equações. (1.5)
- **b)** Prove que se f for analítica e o seu módulo for constante, então f é constante. (1.5)

Considere agora $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{z^2}{|z|^2}$.

- **c)** Determine as partes real e imaginária de $f(x + iy)$ em função de x e y, onde x e $y \in \mathbb{R}$. (1.5)
- **d)** Deduza da alínea **a)** que f não é analítica. (1.5)
- **e)** Deduza da alínea **b)** que f não é analítica. (1.5)
- **f)** Seja $R > 0$, arbitrário. Mostre que $\int_{|z|=R} f(z)\, dz = 0$. (1.5)
  Explique porque não há contradição com o Teorema de Morera.

2. Considere a equação diferencial $2xy - (x^2 + y^2)y' = 0$.

- **a)** Esboce o campo de direcções e as soluções da equação. (2)
- **b)** Determine um factor integrante para a equação e determine as soluções da equação. (1.5)
- **c)** Determine as curvas ortogonais às soluções da equação. (1.5)

3. Seja Ω um domínio regular em $\mathbb{C}$ e $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$, uma função analítica. Suponha que f não se anula em $\partial\Omega$. Escrevemos $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$, onde x e $y \in \mathbb{R}$, e u e v são campos escalares reais.

- **a)** Prove que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{df}{f}$ é igual ao n° de zeros de f em Ω, contando multiplicidades. (1.5)
- **b)** Mostre que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega}\frac{-v\, du+u\, dv}{u^2+v^2}$. (1.5)

***4.** Seja $r > 0$. Considere a variedade C_r de dimensão um, contida no gráfico de $(x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2+y^2}$ e cuja projecção no plano x, y é a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$.

- **a)** Calcule uma orientação, o, para C_r. (1.5)
- **b)** Calcule $\lim_{r\to 0}\int_{C_r} o$. (1.5)

Análise Matemática IV

Exame de Época Especial - 30 de Setembro de 96

Fís. e Matem.

Resolução

1.

a) Suponhamos que $f'(re^{i\theta})$ existe. Então, no ponto $re^{i\theta}$, existem nomeadamente as seguintes derivadas:

- a derivada de f ao longo da semirecta que passa pela origem e por $re^{i\theta}$, e que vale

$$\begin{aligned} f'(re^{i\theta}) &= \lim_{\rho\to 0} \frac{f((r+\rho)e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} \\ &= e^{-i\theta} \lim_{\rho\to 0} \frac{g(r+\rho,\theta) - g(r,\theta)}{\rho} \\ &= e^{-i\theta} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta), \text{ e} \end{aligned}$$

- a derivada de f ao longo da circunferência de centro na origem e raio r, e que vale

$$\begin{aligned} f'(re^{i\theta}) &= \lim_{\phi\to 0} \frac{f(re^{i(\theta+\phi)}) - f(re^{i\theta})}{re^{i(\theta+\phi)} - re^{i\theta}} \\ &= -i\,\frac{e^{-i\theta}}{r} \lim_{\phi\to 0} \frac{f(re^{i(\theta+\phi)}) - f(re^{i\theta})}{\phi}\,\frac{i\phi}{e^{i\phi}-1} \\ &= -i\,\frac{e^{-i\theta}}{r} \lim_{\phi\to 0} \frac{g(r,\theta+\phi) - g(r,\theta)}{\phi} \times \lim_{\phi\to 0} \frac{i\phi}{e^{i\phi}-1} \\ &= -i\,\frac{e^{-i\theta}}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta). \end{aligned}$$

Igualando as duas expressões obtidas, obtém-se $\frac{\partial g}{\partial r} = -\frac{i}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}$.

b) Suponhamos que $|f|^2 = f\bar{f} =$ constante. Derivando em ordem a x e em ordem a y, obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{f}_x f + f_x \bar{f} &= 0, \\ \bar{f}_y f + f_y \bar{f} &= 0. \end{aligned}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_x & f_x \\ \bar{f}_y & f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \bar{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando as equações de Cauchy-Riemann, $f_y = i f_x$,

$$\begin{bmatrix} \bar{f}_x & f_x \\ -i\bar{f}_x & i f_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \bar{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Conclui-se que $f = 0$ ou $f_x = 0$.
Se em algum ponto $f = 0$, então $f \equiv 0$, porque $f =$ constante. Se f nunca se anular, então $f_x \equiv 0$. Logo, $f_y \equiv 0$. Integrando ao longo de uma linha poligonal com lados paralelos aos eixos coordenados, obtém-se $f =$ constante.

c) $f(x+iy) = \frac{(x+iy)^2}{|x+iy|^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{2ixy}{x^2+y^2}$.

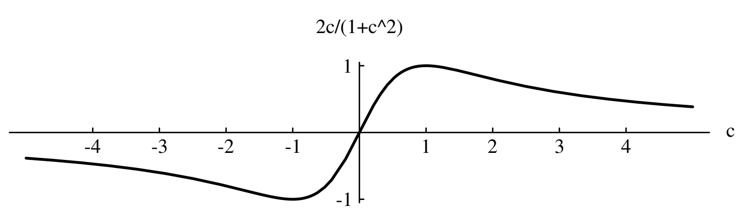
d) $f(re^{i\theta}) = e^{2i\theta}$.
$g_r = 0$ e $g_\theta = 2i\, e^{2i\theta}$.
$-\frac{i}{r}\, g_\theta = \frac{2}{r}\, e^{2i\theta} \neq 0$.

e) $|f| \equiv 1$, mas f não é constante. Logo, f não é analítica.

f) $\int_{|z|=R} f(z)\, dz = \int_{|z|=R} \frac{z^2}{|z|^2}\, dz = \frac{1}{R^2} \int_{|z|=R} z^2\, dz = 0$, porque z^2 é analítica e $|z| = R$ é um contorno fechado (Teorema de Cauchy).
O Teorema de Morera afirma que se f está definida e é contínua numa região Ω, e se $\int_C f(z)\, dz = 0$, para todos os contornos fechados C em Ω, então f é analítica em Ω. Ora, a condição $\int_C f(z)\, dz = 0$ só foi verificada para $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R,\ R > 0\}$, e não para todos os contornos fechados C.

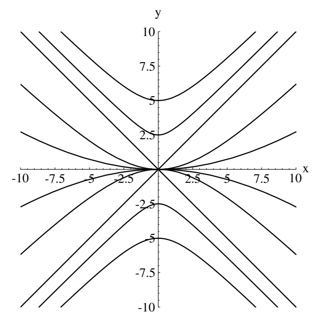
2.

a) A equação não permite determinar o declive das soluções que passam pela origem $(x, y) = (0, 0)$.
Resolvendo para y', obtém-se $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. O declive das soluções é nulo sobre o eixo dos y's ($x = 0$).
Tirando partido do segundo membro ser uma função homogénea, escrevemos $y' = \frac{2(y/x)}{1+(y/x)^2} = \frac{2c}{1+c^2}$, onde $c = y/x$. Ou seja, o declive das soluções é constante quando c é constante, isto é, sobre rectas que passam pela origem.
Na figura seguinte faz-se um esboço do gráfico da função $c \mapsto \frac{2c}{1+c^2}$:



$c \mapsto \frac{2c}{1+c^2}$.

A função y' anula-se sobre os eixos coordenados; tem um máximo absoluto em $x = y$ que vale 1; e tem um mínimo absoluto em $x = -y$ que vale -1.
$y = 0$, $y = x$ e $y = -x$ são soluções da equação diferencial.
Na figura seguinte faz-se um esboço das soluções da equação diferencial:



Esboço das soluções de $2xy - (x^2 + y^2)y' = 0$.

b) A equação é da forma $M + Ny' = 0$, com $M(x, y) = 2xy$ e $N(x, y) = -(x^2 + y^2)$. A equação não é exacta porque $M_y \neq N_x$.
Multiplicando a equação por μ obtém-se $\mu M + \mu N y' = 0$. Para que esta equação seja exacta devemos ter $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, ou seja, $\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$.
Se $\mu = \mu(x)$, então $\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$. No caso presente segue-se que $\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{4x}{-(x^2+y^2)}$. Tal como o primeiro membro, o segundo membro deveria ser apenas função de x. Conclui-se que a equação não admite um factor integrante que seja apenas função de x.
Se $\mu = \mu(y)$, então $\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M}$. No caso presente segue-se que $\frac{\mu_y}{\mu} = -\frac{2}{y}$. Determinemos uma solução desta equação. Como $\ln|\mu| = -2\ln|y| + k$, onde k é constante, podemos tomar $\mu = \frac{1}{y^2}$.
Note-se que $y \equiv 0$ é solução da equação. Da unicidade, garantida pelo Teorema de Picard para $(x, y) \neq (0, 0)$, que é a região onde $(x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2+y^2}$ é de classe C^1, conclui-se que uma solução que passe por (x_0, y_0) com $y_0 \neq 0$ nunca tem ordenada nula, excepto possivelmente se passar pela origem.
A equação $\mu M + \mu N y' = \frac{2x}{y} - \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) y' = 0$ é exacta.
Determinemos ϕ tal que $\frac{d}{dx}\phi(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} y' = \frac{2x}{y} - \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) y'$.
Obtém-se $\phi(x, y) = \frac{x^2}{y} - y - c$, com $c \in \mathbb{R}$.
Portanto, $\frac{x^2}{y} - y = c$, com $c \in \mathbb{R}$, são soluções da equação diferencial.
Resolvendo para x em função de y, obtém-se $x = \pm\sqrt{y^2 + cy}$.
Resolvendo para y em função de x, obtém-se $y = \frac{-c \pm \sqrt{c^2+4x^2}}{2}$. Note-se

que $|c| \leq \sqrt{c^2+4x^2}$. Logo, no semiplano superior $y = \frac{-c+\sqrt{c^2+4x^2}}{2}$, enquanto no semiplano inferior $y = \frac{-c-\sqrt{c^2+4x^2}}{2}$.
Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. O Teorema de Picard garante existência e unicidade de solução local para $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. As soluções são as obtidas acima. Para estudar a unicidade global há que analisar quais as soluções que passam em $(0,0)$.
Pela simetria das soluções, basta considerar o que se passa no primeiro quadrante. Se $x_0 > y_0$, então $\frac{x_0^2}{y_0} - y_0 > 0$, enquanto que se $x_0 < y_0$, então $\frac{x_0^2}{y_0} - y_0 < 0$. Por outro lado, para $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$, o valor de y para $x = 0$ é 0 se $x_0 > y_0$, e é $-\frac{x_0^2}{y_0} + y_0$ se $x_0 < y_0$.
Esta análise conduz aos resultados seguintes, conforme o esboço de soluções:

- Se $|y_0| > |x_0|$, então há apenas uma solução da equação diferencial que passa por (x_0, y_0). O c correspondente é $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$.
- Se $|x_0| \geq |y_0|$, então a equação diferencial tem infinitas soluções que passam no ponto (x_0, y_0). Se $y_0 = 0$, então $y \equiv 0$, para x com o sinal de x_0; podemos considerar que este caso corresponde a $c = \infty$. Se $y_0 \neq 0$, deverá ser $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$ para x com o sinal de x_0. Mas o valor de c não está univocamente determinado para x com sinal contrário ao de x_0.

c) As curvas ortogonais às soluções da equação dada satisfazem $y' = -\frac{x^2+y^2}{2xy}$, pois têm declives que são o simétrico do inverso do declive das soluções da equação dada.
A equação $(x^2+y^2) + 2xyy' = 0$ é exacta. As suas soluções são $\frac{x^3}{3} + xy^2 = c$, com $c \in \mathbb{R}$.

3.

a) Suponhamos que f tem um zero de ordem m no ponto $a \in \Omega$. Podemos escrever $f(z) = (z-a)^m f_m(z)$, com $f_m(a) \neq 0$. Então, $f'(z) = m(z-a)^{m-1} f_m(z) + (z-a)^m f_m'(z)$. Portanto, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{f_m'(z)}{f_m(z)}$. Logo, $\frac{f'}{f}$ tem um polo simples em a, com resíduo m.
Como o raciocínio do parágrafo anterior é válido para todos os zeros de f, segue-se, do Teorema dos Resíduos, que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ é igual ao número de zeros de f em Ω, contando multiplicidades.

b) $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{du+idv}{u+iv} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{(u\,du+v\,dv)+i(-v\,du+u\,dv)}{u^2+v^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Omega} \frac{-v\,du+u\,dv}{u^2+v^2}$, porque $\frac{u\,du+v\,dv}{u^2+v^2} = \frac{1}{2}\frac{d(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = \frac{1}{2}\,d\ln(u^2+v^2)$, ou seja, porque a forma diferencial $\frac{u\,du+v\,dv}{u^2+v^2}$ é exacta.

4.

a) Se $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, então $\frac{2xy}{x^2+y^2} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$.
A função $g :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$, definida por $g(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \sin(2\theta))$ é uma parametrização de $C_r \setminus \{(1,0,0)\}$.
O vector $(r\sin\theta, r\cos\theta, 2\cos(2\theta))$ é tangente a C_r e $r\sin\theta\, dx + r\cos\theta\, dy + 2\cos(2\theta)\, dz$ é uma orientação para C_r.

b) $\lim_{r\to 0}\int_{C_r} o = \lim_{r\to 0}\int_{C_r} o \cdot o\, ds = \lim_{r\to 0}\int_{C_r} 1\, ds =$
$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2 + 4\cos^2(2\theta)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 2|\cos(2\theta)|\, d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos(2\theta)\, d\theta =$
8. Para passar o limite para dentro do integral fez-se uma aplicação simples do Teorema da Convergência Dominada.

Análise Matemática IV

1º Teste - 19 de Abril de 97

Civ., Fís. e Matem.

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Seja $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, e $\log z = \ln r + i\theta$.

a) Determine a região de analiticidade da função logarítmo. Justifique, usando as equações de Cauchy-Riemann na forma polar. (2.5)

b) Usando a definição, calcule $\int_{|z|=1} \log z \, dz$. (2.5)

2. Determine uma aplicação bijectiva e analítica de $\{z \in \mathbb{C} : |z - \sqrt{2}\, i| < 2 \text{ e } |z + \sqrt{2}\, i| < 2\}$ em $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. (2.5)

3. Seja $r > 1$ e $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

a) Calcule $\int_C \frac{1}{z(z-1)}\, dz$, usando o Teorema dos Resíduos. (2.5)

b) Obtenha o resultado da alínea anterior usando o Teorema de Cauchy e majorando o módulo do integral para r grande. (2.5)

c) Prove que $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ não é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. (2.5)

d) Prove que $z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$ é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$. (2.5)

4. Seja f uma função inteira tal que $|f(z)| \leq c(1 + r^\alpha)$ se $|z| = r$, onde c e α pertencem a $\mathbb{R}^+$. O que pode afirmar quanto a f? *Sugestão:* Prove uma generalização do Teorema de Liouville. (2.5)

Análise Matemática IV

1º Teste - 19 de Abril de 97

Civ., Fís. e Matem.

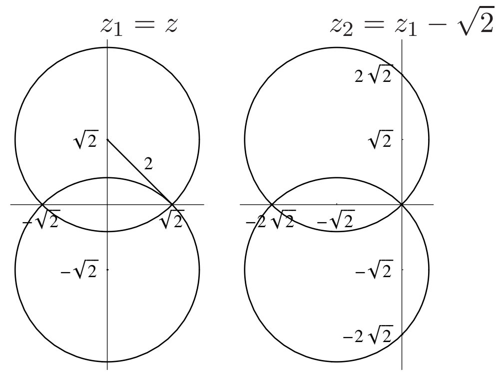
Resolução

1.

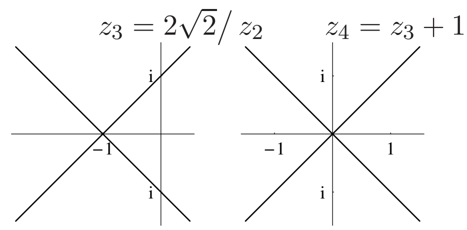
a) Em $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, a função log tem derivadas parciais contínuas em ordem a r e a θ e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial}{\partial r} \log z = -\frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \log z = \frac{1}{r}$; portanto é analítica.
Em $r > 0$ e $\theta = \pi$, a função log é descontínua; portanto não é analítica.

b) $z(\theta) = e^{i\theta}$, com $-\pi < \theta \leq \pi$, é uma parametrização da circunferência de raio um, centrada na origem.
$\int_{|z|=1} \log z\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} \log z(\theta)\, z'(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} i\theta\, ie^{i\theta}\, d\theta = -\int_{-\pi}^{\pi} \theta e^{i\theta}\, d\theta = i\theta e^{i\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} - i\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\, d\theta = i\theta e^{i\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} - e^{i\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -2\pi i.$

2.

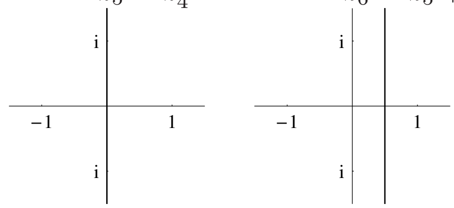


Leva-se um dos pontos de intersecção das circunferências para a origem.



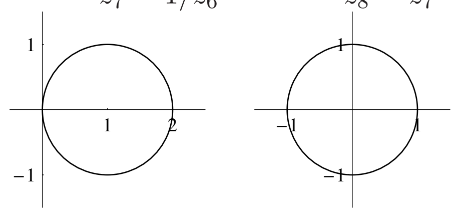
Inverte-se ($z \mapsto \frac{2\sqrt{2}}{z}$). O ponto 0 é transformado em ∞, o ponto $-2\sqrt{2}$ é transformado em -1, o ponto $2\sqrt{2}i$ é transforamdo em $-i$ e o ponto $-2\sqrt{2}i$ é transforamdo em i. As circunferências são transformadas em rectas.

$z_5 = z_4^2$ $\qquad$ $z_6 = z_5 + 1/2$



$z \mapsto z^2$ permite transformar um quadrante num semiplano. O semiplano é deslocado para a direita de modo a que a recta que o limita não passe pela origem.

$z_7 = 1/z_6$ $\qquad$ $z_8 = z_7 - 1$



Inverte-se ($z \mapsto \frac{1}{z}$). O ponto ∞ é transformado em 0 e o ponto $\frac{1}{2}$ é transformado em 2. A recta $\operatorname{Re} z_6 = \frac{1}{2}$ é transformada na circunferência $|z_7 - 1| = 1$.

Compondo as transformações acima obtém-se $z_8 = \frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}}+1\right)^2+\frac{1}{2}} - 1$.

3.

a) $\operatorname{Res}\frac{1}{z(z-1)}\Big|_{z=0} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z-1} = -1.$

$\operatorname{Res}\frac{1}{z(z-1)}\Big|_{z=1} = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z} = 1.$

$\int_C \frac{1}{z(z-1)}\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\frac{1}{z(z-1)}\Big|_{z=0} + \operatorname{Res}\frac{1}{z(z-1)}\Big|_{z=1}\right) = 0.$

b) O Teorema de Cauchy afirma que os integrais de funções analíticas num domínio Ω, ao longo de caminhos homotópicos em Ω, são iguais. Portanto o valor do integral não depende de r.

$\left|\int_C \frac{1}{z(z-1)}\, dz\right| \leq \int_C \frac{1}{|z|(|z|-1)}|dz| = \int_C \frac{1}{r^2-r}|dz| = \frac{2\pi r}{r^2-r} \to 0$, quando $r \to +\infty$, onde se usou o facto de $|z-1| \geq |z| - 1$ para $|z| > 1$. Logo, $\int_C \frac{1}{z(z-1)}\, dz = 0$.

c) Seja Ω um domínio em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$, contínua. Sabemos que f é a derivada de uma função analítica sse o integral de f ao longo de qualquer contorno fechado em Ω é nulo.

$\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z-1}\, dz = 2\pi i \neq 0.$

Concluimos que $z \mapsto \frac{1}{z-1}$ não é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

d) Se γ é um contorno de Jordan fechado em $\mathbb{C}\setminus[0,1]$, descrito no sentido directo, então γ é homotópica à curva C do enunciado (supondo C descrita no sentido directo) ou γ é homotópica a um ponto, pelo que $\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)}\,dz = \int_C \frac{1}{z(z-1)}\,dz = 0$.
Conclui-se que os integrais de $\frac{1}{z(z-1)}$ ao longo de contornos fechados em $\mathbb{C}\setminus[0,1]$ são nulos.
Portanto, $z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$ é a derivada de uma função analítica em $\mathbb{C}\setminus[0,1]$.

4. Designe-se por n a parte inteira de α, ou seja, o natural tal que $\alpha - 1 < n \leq \alpha$. Vamos provar que a derivada de ordem $n+1$ de f é identicamente nula.
Seja $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Pela fórmula integral de Cauchy,
$f^{(n+1)}(a) = \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+2}}\,dz$.
$|f^{(n+1)}(a)| \leq \frac{(n+1)!}{2\pi}\int_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+2}}\,|dz| \leq \frac{(n+1)!}{2\pi}\int_{|z-a|=r} \frac{c(1+|z|^\alpha)}{|z-a|^{n+2}}\,|dz|$
$\leq \frac{(n+1)!}{2\pi}\int_{|z-a|=r} \frac{c[1+(r+|a|)^\alpha]}{r^{n+2}}\,|dz| = \frac{(n+1)!}{2\pi}\frac{c[1+(r+|a|)^\alpha]}{r^{n+2}}\,2\pi r \sim c\,(n+1)!\,\frac{r^{\alpha+1}}{r^{n+2}} \to 0$,
quando $r \to +\infty$. Logo, $f^{(n+1)}(a) = 0$. Como a é arbitrário, $f^{(n+1)} \equiv 0$.
Integrando $n+1$ vezes, conclui-se que f é um polinómio de grau menor ou igual a n.

Análise Matemática IV

19 de Junho de 97

Civ., Fís. e Matem.

2º Teste	–	Grupos (1 ou 2) e 3	–	90 minutos
1º Exame	–	Grupos (1 ou 2) e 3, 4, 5 e 6	–	3 horas

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial $y' = e^{y-t}$.

a) Esboce o seu campo de direcções. (3)

b) Determine a solução da equação que satisfaz $y(t_0) = y_0$. Sugestão: A equação é separável. (2)

c) As soluções são simétricas em relação à recta $y = t$. Justifique. (1)

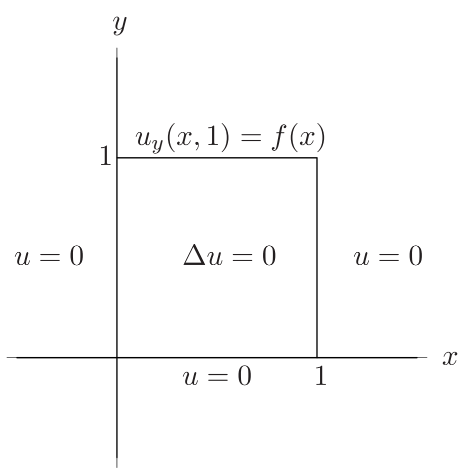
2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule e^{At}. (3)

b) Calcule a solução de $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. (2)

c) Em termos de coordenadas polares, $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, verifique que o sistema da alínea **b)** pode ser escrito $r' = r$ e $\theta' = 1$, ou seja, $\frac{dr}{d\theta} = r$. (1)
Escreva r em função de θ.

3. Seja $f \in C^2[0,1]$, tal que $f(0) = f(1) = 0$. Determine a função harmónica no quadrado de lado um representado na figura que satisfaz as condições fronteira mistas indicadas. (4)



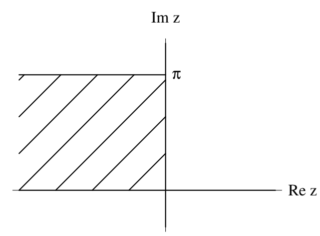
4. Seja $z = re^{i\theta}$, com $r \geq 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, e $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$.

a) Determine a região de analiticidade da função raíz quadrada. Justifique, usando as equações de Cauchy-Riemann na forma polar. (2.5)

b) Usando a definição, calcule $\int_{|z|=1} \sqrt{z}\, dz$. (2.5)

5. Calcule $\int_{|z-2|=1} \frac{\log z}{(z-2)^2}\, dz$. Justifique. (2.5)

6. Determine uma aplicação bijectiva e analítica da região a sombreado na figura (2.5)



num semiplano.

Análise Matemática IV

1º Exame - 19 de Junho de 97

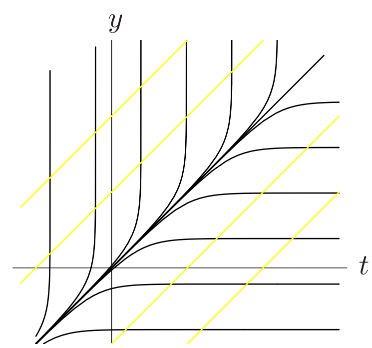
Civ., Fís. e Matem.

Resolução

1.

a) Se $y - t = b$, então $y' = e^b$. Por exemplo,

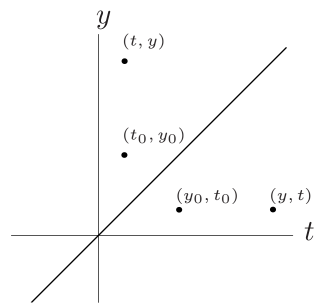
$$\begin{array}{lll} y - t = -2 & \Rightarrow & y' = e^{-2}, \\ y - t = -1 & \Rightarrow & y' = e^{-1}, \\ y - t = 0 & \Rightarrow & y' = 1, \\ y - t = 1 & \Rightarrow & y' = e, \\ y - t = 2 & \Rightarrow & y' = e^2. \end{array}$$



Campo de direcções e esboço das soluções.

b) De $y' = e^{y-t}$ tira-se, sucessivamente,
$e^{-y}y' = e^{-t}$,
$\frac{d}{dt}e^{-y} = \frac{d}{dt}e^{-t}$,
$e^{-y(t)} - e^{-y(t_0)} = e^{-t} - e^{-t_0}$,
$e^{-y} - e^{-y_0} = e^{-t} - e^{-t_0}$,
$y = -\ln(e^{-t} - e^{-t_0} + e^{-y_0})$.
A solução que verifica $y(t_0) = y_0$ existe enquanto $e^{-t} - e^{-t_0} + e^{-y_0} > 0$.
Se $t_0 > y_0$, então $e^{-t_0} - e^{-y_0} < 0$; a solução está globalmente definida.
Se $t_0 < y_0$, então $e^{-t_0} - e^{-y_0} > 0$; a solução existe para $t < -\ln(e^{-t_0} - e^{-y_0})$.
Se $y_0 = t_0$, então a solução é a recta $y = -\ln e^{-t} = t$.

c) A reflexão de (t, y) na recta $y = t$ é o ponto (y, t).



Reflexão de pontos na recta $y = t$.

- *1º Método:* Um ponto (t, y) pertence à solução que passa por (t_0, y_0) sse $e^{-y} - e^{-y_0} = e^{-t} - e^{-t_0}$. Um ponto $(\bar{t}, \bar{y})$ pertence à solução que passa por (y_0, t_0) sse $e^{-\bar{y}} - e^{-t_0} = e^{-\bar{t}} - e^{-y_0}$, ou seja, sse $(\bar{y}, \bar{t})$ pertence à solucão que passa por (t_0, y_0). Ou seja, um ponto $(\bar{t}, \bar{y})$ pertence à solução que passa por (y_0, t_0) sse o ponto simétrico em relação à recta $y = t$, $(\bar{y}, \bar{t})$, pertence à solução que passa por (t_0, y_0).
- *2º Método:* Suponhamos que o declive da solução que passa no ponto (t, y) é $\tan\alpha$. Para as soluções serem simétricas em relação à recta $y = t$, o declive da solução que passa em (y, t) deve ser $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$. Portanto, para as soluções serem simétricas, devem ser inversos os declives de pontos simétricos em relação à recta $y = t$. Como o declive da solução que passa em (t, y) é e^{y-t}, o declive da solução que passa em (y, t) é e^{t-y}, e $e^{t-y} = \frac{1}{e^{y-t}}$, as soluções são simétricas em relação à recta $y = t$.

2.

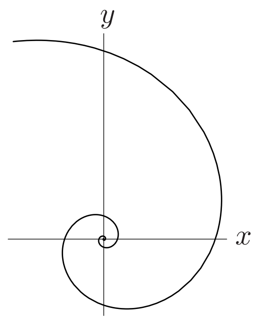
a) Os valores próprios de A são as soluções de $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\,\lambda + \det A = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, ou seja, $1 \pm i = 0$.
$\Lambda = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}$.
$(i, 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio $1 + i$, e $(-i, 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio $1 - i$.
A matriz $S = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliza a matriz A.
A inversa de S é $S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix}$.
$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$.
$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix}$.
$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t} & ie^{(1+i)t} - ie^{(1-i)t} \\ -ie^{(1+i)t} + ie^{(1-i)t} & e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t} \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{bmatrix}$.

c) Substituindo $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ no sistema $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y, \end{cases}$ obtém-se $\begin{cases} r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta' = r\cos\theta - r\sin\theta, \\ r'\sin\theta - r\cos\theta\,\theta' = r\cos\theta + r\sin\theta. \end{cases}$ Multiplicando a primeira equação do sistema por $\cos\theta$, a segunda equação por $\sin\theta$, e adicionando os resultados, vem $r' = r$. Finalmente, substituindo r' por r numa das equações do sistema, conclui-se que $\theta' = 1$.

$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{r}{1} = r$.

De $\frac{dr}{d\theta} = r$ tira-se $r = r_0 e^{\theta - \theta_0}$.



Esboço de $r = r_0 e^{\theta-\theta_0}$ no plano (x, y).

3. Usaremos separação de variáveis.

Vamos tentar determinar soluções da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$, não triviais, de

$$(\star) = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{se } (x, y) \in]0,1[\times]0,1[, \\ u(0, y) = u(1, y) = 0, & \text{se } y \in [0, 1], \\ u(x, 0) = 0, & \text{se } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Substituindo $u = XY$ em $u_{xx} + u_{yy} = 0$, obtém-se $X''Y + XY'' = 0$, ou seja, $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$.

$\frac{X''}{X}$ não depende de y e $\frac{Y''}{Y}$ não depende de x. Logo, $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$, onde λ é uma constante real. Ou seja, $X'' - \lambda X = 0$ e $Y'' + \lambda Y = 0$.

De $u(0, y) = u(1, y) = 0$ tira-se que $X(0)Y(y) = X(1)Y(y) = 0$. Como pretendemos funções u não identicamente nulas, a função X deverá verificar $X(0) = X(1) = 0$.

O sistema

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, & \text{se } x \in]0, 1[, \\ X(0) = X(1) = 0, \end{cases}$$

admite soluções não triviais sse $\lambda = -n^2\pi^2$, com $n \in \mathbb{N}$; as soluções são múltiplos de $X_n = \sin(n\pi x)$.

De $u(x, 0) = 0$ tira-se que $X(x)Y(0) = 0$. Como pretendemos funções u não

identicamente nulas, a função Y deverá verificar $Y(0) = 0$.
A solução geral de $Y_n'' - n^2\pi^2 Y_n = 0$ é $Y_n(y) = a_n \sinh(n\pi y) + b_n \cosh(n\pi y)$.
Como pretendemos $Y_n(0) = 0$, vem $Y_n(y) = a_n \sinh(n\pi y)$.
As funções $u_n(x,y) = c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$, $n \in \mathbb{N}$, são soluções não trivias de $(\star)$ da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$.
Formalmente, $u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$ é solução de $(\star)$. Determinemos as constantes c_n de modo a que $u_y(x,1) = f(x)$, para $0 \le x \le 1$.
$u_y(x,1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\pi c_n \cosh(n\pi)\sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(n\pi x)$, se fizermos $d_n = n\pi c_n \cosh(n\pi)$. Do estudo das Séries de Fourier, sabemos que
$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin(n\pi x) = f(x)$ se $d_n = 2\int_0^1 f(s)\sin(n\pi s)\,ds$.
Concluimos que, formalmente, $u(x,y) := \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)$ é solução do problema do enuciado, desde que $c_n = \frac{2}{n\pi\cosh(n\pi)}\int_0^1 f(s)\sin(n\pi s)\,ds$.

Justificação (opcional):

Vamos provar que a função u, definida no último parágrafo, é de classe C^2, e que as derivadas de u podem ser calculadas termo a termo. Uma vez provado isto segue-se que a função u é harmónica. Note-se ainda que uma como $f \in C^1$ (de facto, $f \in C^2$) a Série de Fourier de $u_y(\cdot,1)$ converge uniformemente para $f(\cdot)$.
Por simplicidade vamos provar que $f \in C^0$ implica $u \in C^0$, deixando para o leitor a prova de que $f \in C^1$ implica $u \in C^1$, e $f \in C^2$ implica $u \in C^2$.
Da desigualdade de Bessel, pode concluir-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n^2 < +\infty$, onde as constantes d_n são, como acima, os coeficientes de Fourier de f.
Relembrando que $d_n = n\pi c_n \cosh(n\pi)$, vem $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 c_n^2 \cosh^2(n\pi) < +\infty$.
Ora, $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n \sin(n\pi x)\sinh(n\pi y)| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \sinh(n\pi) \le$
$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|\cosh(n\pi) \le \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 c_n^2 \cosh^2(n\pi)\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} < +\infty$. Logo, a série que define u converge uniformemente e u é contínua.
Se f é C^1 deve aplicar-se a desigualdade de Bessel aos coeficientes de f' para provar que as séries de Fourier das primeiras derivadas de u convergem uniformemente. Se $f \in C^2$ deve aplicar-se a desigualdade de Bessel aos coeficientes de Fourier f'' provar que as séries de Fourier das segundas derivadas de u convergem uniformemente.
Do resultado do parágrafo anterior, e do Teorema que afirma que "a convergência uniforme de g_n para g e de g_n' para h implica que g é diferenciável e $g' = h$,"pode concluir-se que u é C^2, e que as derivadas de u podem ser calculadas termo a termo.

Prova de unicidade de solução:

Seja $S = [0,1] \times [0,1]$ e ν a normal exterior a ∂S. Note-se que $u\nabla u = 0$ em ∂S e $u\,\Delta u = 0$ em S, porque $\Delta u = 0$ em S.
$0 = \int_{\partial S} u\nabla u \cdot \nu\, dl = \iint_S \operatorname{div}(u\nabla u)\, dS = \iint_S u\,\Delta u\, dS + \iint_S |\nabla u|^2\, dS = \iint_S |\nabla u|^2\, dS$. Logo, $\nabla u \equiv 0$ em S. Portanto, u é constante. Como $u = 0$ em

parte da fronteira de S, $u \equiv 0$.

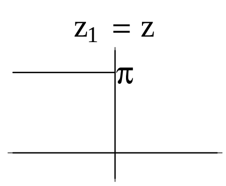
4.

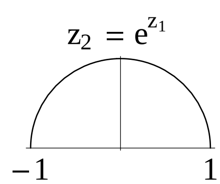
a) Em $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$, a função $z \mapsto \sqrt{z}$ tem derivadas parciais contínuas em ordem a r e a θ e satisfaz as equações de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{z} = -\frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\sqrt{z} = \frac{1}{2\sqrt{r}}e^{i\frac{\theta}{2}}$; portanto é analítica.
Se $r = 0$, então a função $z \mapsto \sqrt{z}$ não tem derivada parcial em ordem a r, pelo que não é analítica.
Em $r > 0$ e $\theta = \pi$, a função $z \mapsto \sqrt{z}$ é descontínua; portanto não é analítica.

b) $z(\theta) = e^{i\theta}$, com $-\pi < \theta \leq \pi$, é uma parametrização da circunferência de raio um, centrada na origem.
$\int_{|z|=1} \sqrt{z}\, dz = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{z(\theta)}\, z'(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{\theta}{2}}\, ie^{i\theta}\, d\theta = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\frac{3\theta}{2}}\, d\theta = \frac{2}{3}e^{i\frac{3\theta}{2}}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2i}{3}$.

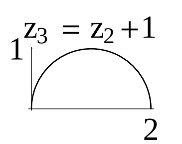
5. Seja $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, e $\log z = \ln r + i\theta$. A função log é analítica em $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$. É em particular analítica em $|z-2| \leq 1$.
A fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada de f é
$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz$. Toma-se $f(z) = \log z$, $a = 2$ e $r = 1$.
O valor do integral é $2\pi i\, \frac{d}{dz}\log z\Big|_{z=2} = 2\pi i\, \frac{1}{2} = \pi i$.

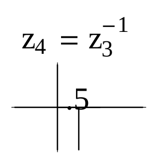
6.



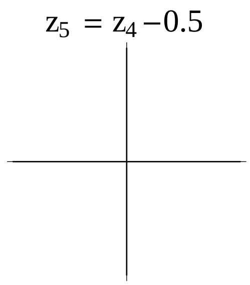


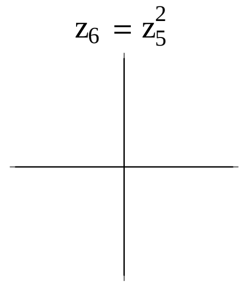
Transforma-se a faixa num semi-disco.





Leva-se um dos pontos de intersecção da circunferência com o eixo dos x para a origem. Inverte-se ($z \mapsto \frac{1}{z}$). O ponto 0 é transformado em ∞, o ponto 2 é transformado em $\frac{1}{2}$.





Desloca-se a região para a esquerda de modo a coincidir com o quarto quadrante. A função $z \mapsto z^2$ transforma um quadrante num semiplano.

Compondo as transformações acima obtém-se $z_6 = \left(\frac{1}{e^z+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{e^z-1}{e^z+1}\right)^2$ $= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}\right)^2 = \frac{1}{4}\tanh^2\frac{z}{2}$.

Análise Matemática IV

Exame de 2ª Época - 17 de Julho de 97

Civ., Fís. e Matem.

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Considere a função $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$.

a) Classifique as singularidades da n-ésima potência da função. (1)

b) Calcule o integral da n-ésima potência da função ao longo de $|z-1| = 1$. (2)

c) Calcule o integral da função ao longo do segmento que vai de -1 a i. (1)

d) Calcule a imagem pela função do triângulo com vértices em 0, 1 e i. (1.5)

e) Calcule o desenvolvimento da função em série de potências de z, para $|z| < 1$. (0.5)

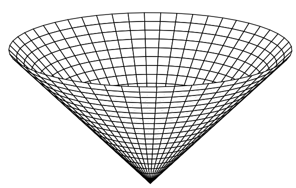
f) Calcule o desenvolvimento da função em série de potências de z, para $|z| > 1$. (0.5)

g) Calcule o desenvolvimento da função em série de potências de $z - 1$, para $|z - 1| < 1$. (0.5)

2. Determine a solução geral da equação da mola forçada com atrito, com constante de restituição 25 e coeficiente de atrito 8, descrita pela equação (2)

$$x'' + 8x' + 25x = 26\cos(3t).$$

3. Considere o cone com uma abertura de 90^o representado na figura.



Cone.

Suponha que se deita água para dentro do cone a uma taxa de 1 metro cúbico por segundo. Designe por $h(t)$ a altura de água no cone no instante t. Suponha ainda que a água se escoa pelo vértice do cone a uma taxa proporcional à altura de água no cone, sendo a constante de proporcionalidade 0.1 .

a) Mostre que a equação diferencial para h é $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$. (1)

b) Esboce o campo de direcções e as soluções da equação da alínea anterior. Considere apenas t e h positivos. (1)

c) Qual o limite das soluções quando $t \to +\infty$? Prove rigorosamente a resposta sem resolver a equação diferencial. (0.5)

d) Suponha que a altura inicial de água no cone é superior a 50 metros. Para que quantidade de água no cone é máxima, em valor absoluto, a taxa de variação da altura de água no cone? (0.5)

e) Interprete fisicamente o comportamento das soluções, analisando o sentido de variação da altura de água no cone, e a evolução da taxa de variação da altura de água no cone no tempo. (0.5)

f) Resolva a equação diferencial da alínea **a)**. (1)

4. Considere a equação diferencial $2xy - (x^2 + y^2)y' = 0$.

a) Esboce o seu campo de direcções e esboce as soluções. (1.5)

b) Determine um factor integrante que a transforme numa equação exacta e resolva-a. (1.5)

c) Resolva a equação diferencial usando o facto de ser homogénea, ou seja, determine uma equação diferencial para $v := \frac{y}{x}$, resolva-a e confirme o resultado obtido na alínea anterior. (1.5)

5. Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^2$. Enuncie e prove o princípio de máximo para a equação (2)

$$\begin{cases} \Delta u \geq 0 & \text{em } \Omega, \\ u = \varphi & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$.

Análise Matemática IV

Exame de 2ª Época - 17 de Julho de 97

Civ., Fís. e Matem.

Resolução

1.

a) $\frac{1+z}{1-z} = \frac{-1+z+2}{1-z} = \frac{-2}{z-1} - 1$ tem um pólo de primeira ordem no ponto 1, pelo que a sua n-ésima potência tem um pólo de n-ésima ordem no ponto 1.

b) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = \left(\frac{-2}{z-1} - 1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{-2}{z-1}\right)^{n-k} (-1)^k = \frac{(-2)^n}{(z-1)^n} + \ldots + n \cdot \frac{-2}{z-1}(-1)^{n-1} + (-1)^n$. O resíduo da n-ésima potência da função no ponto 1 é $2n(-1)^n$.

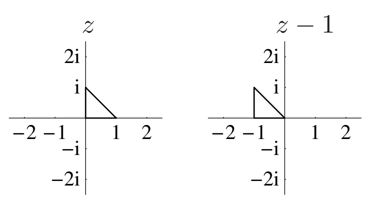
Em alternativa, $\operatorname{Res} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n\Big|_{z=1} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n (z-1)^n\Big|_{z=1} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (1+z)^n\Big|_{z=1} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{n!}{1!} (1+z)^1\big|_{z=1} = 2n(-1)^n$.

$\int_{|z-1|=1} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n\Big|_{z=1} = 4n\pi i(-1)^n$.

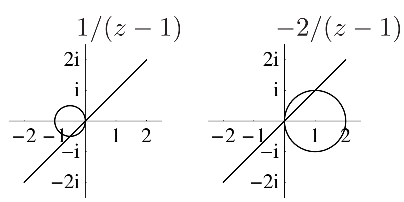
c) Seja $\operatorname{Log} z = \log r + i\theta$, se $z = re^{i\theta}$ com $-\pi < \theta < \pi$, o valor principal do logarítmo. A função $z \mapsto -z - 2\operatorname{Log}(1-z)$ é uma primitiva de $z \mapsto -1 + \frac{2}{1-z}$.

$\int_{-1}^{i} \frac{1+z}{1-z}\, dz = [-z - 2\operatorname{Log}(1-z)]\big|_{-1}^{i} = -i - 2\operatorname{Log}(1-i) + (-1) + 2\operatorname{Log} 2 = -i - 2\operatorname{Log}(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}) + (-1) + 2\operatorname{Log} 2 = -i + i\frac{\pi}{2} - 1 + \log 2$.

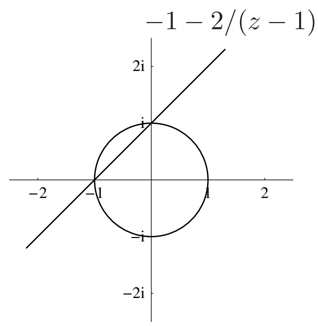
d)



O triângulo com vértices em 0, 1 e i, e a sua translação uma unidade para a esquerda.



Na inversão $w = re^{i\theta} \mapsto \frac{1}{w} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ o módulo da imagem é o inverso do módulo original, enquanto o argumento da imagem é o simétrico do argumento original. A multiplicação por -2 corresponde a uma reflexão na origem e a uma homotetia de razão 2.



A imagem do triângulo com vértices em 0, 1 e i
por $z \mapsto \frac{1+z}{1-z} = -1 - \frac{2}{z-1}$.

e) $\frac{1+z}{1-z} = -1 + \frac{2}{1-z} = -1 + 2\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2z^k$, para $|z| < 1$.

f) $\frac{1+z}{1-z} = -1 - \frac{2}{z-1} = -1 - \frac{1}{z}\frac{2}{1-1/z} = -1 - \frac{2}{z}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k} = -1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{z^k}$, para $|z| > 1$.

g) $\frac{1+z}{1-z} = \frac{-2}{z-1} - 1$, para $|z-1| < 1$.

2. A equação $r^2 + 8r + 25 = 0$ tem as soluções $-4 \pm 3i$.
A solução geral da equação homogénea $x''+8x'+25x = 0$ é $x = c_1 e^{-4t}\cos(3t) + c_2 e^{-4t}\sin(3t)$, com c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.
Vamos determinar uma solução particular da equação $x'' + 8x' + 25x = 26\cos(3t)$ da forma $x = a\cos(3t) + b\sin(3t)$.
Se $x = a\cos(3t) + b\sin(3t)$, então $x' = -3a\sin(3t) + 3b\cos(3t)$ e $x'' = -9a\cos(3t) - 9b\sin(3t)$.
Substituindo na equação, $-9a\cos(3t) - 9b\sin(3t) - 24a\sin(3t) + 24b\cos(3t) + 25a\cos(3t) + 25b\sin(3t) = 26\cos(3t)$. Igualando os coeficientes de $\cos(3t)$ e $\sin(3t)$,

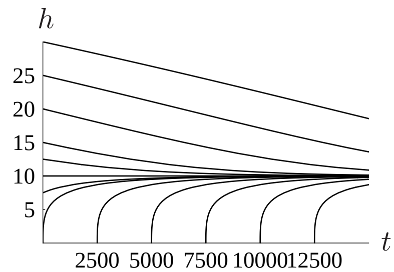
$$\begin{cases} 16a + 24b &= 26 \\ -24a + 16b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

A solução geral da equação da mola forçada com atrito descrita pela equação do enunciado é $x = c_1 e^{-4t}\cos(3t) + c_2 e^{-4t}\sin(3t) + \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{3}{4}\sin(3t)$, com c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.

3.

a) Seja $V(t)$ o volume de água (medido em metros cúbicos) dentro do cone no instante t. Do enunciado vem que $\frac{dV}{dt} = 1 - 0.1h$.
Por outro lado, o volume de um cone é $\frac{1}{3}$ do produto da área da base pela altura. Como a abertura do cone é 90^o, e por consequência o raio do cone é igual á sua altura, $V = \frac{1}{3} \times \pi h^2 \times h = \frac{\pi}{3} h^3$. Logo, $\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$.
Igualando as duas expressões para $\frac{dV}{dt}$, obtém-se $\pi h^2 \frac{dh}{dt} = 1 - 0.1h$, ou seja, $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$.

b) O declive das soluções ($\frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$) é constante sobre rectas horizontais (h = constante). É positivo se $h < 10$, nulo se $h = 10$ e negativo se $h > 10$.
O declive das soluções tende para $+\infty$ quando $h \to 0$.
O declive das soluções tende para zero se $h \to 10$ ou $h \to +\infty$.
Por outro lado, $\frac{d}{dh}\frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2} = \frac{1}{\pi}\frac{-0.1h^2-(1-0.1h)2h}{h^4} = \frac{1}{\pi}\frac{0.1h(h-20)}{h^4}$; portanto, o declive das soluções é mínimo para $h = 20$. O valor deste mínimo é $-\frac{1}{400\pi}$.



Esboço das soluções de $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$.

c) $h \equiv 10$ é solução da equação diferencial.
As soluções que passam por pontos (t_0, h_0) com $h_0 > 10$ são estritamente decrescentes. Além disso, são limitadas inferiormente pela solução $h \equiv 10$, pois as soluções não se cruzam - há unicidade pelo Teorema de Picard, porque a função $(t, h) \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$ é de classe C^1 no semiplano superior. Portanto as soluções que passam por pontos (t_0, h_0) com $h_0 > 10$ têm limite quando $t \to +\infty$.
Suponhamos que uma destas soluções $\bar{h}$ tem limite $l > 10$. Do estudo da função $\frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$ feito na alínea anterior, concluimos que o declive de $\bar{h}$ é necessariamente inferior a $\max\{\bar{h}'(0), \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1l}{l^2}\}$. Este valor é estritamente menor do que zero. Isto é uma contradição, pois $\bar{h}$ tem uma assímptota horizontal.
As soluções que passam por pontos (t_0, h_0) com $0 < h_0 < 10$ são estritamente crescentes e limitadas superiormente pela solução $h \equiv 10$. Portanto, também elas têm limite $l \leq 10$ quando $t \to +\infty$. O seu declive é necessariamente superior a $\frac{1}{\pi}\frac{1-0.1l}{l^2}$. Logo $l = 10$.

d) Se a altura inicial de água no cone é 50 metros, então, como foi visto na alínea **b)**, a taxa de variação da altura de água no cone é máxima, em valor absoluto, quando a altura de água no cone é 20 metros. Isto corresponde a $\frac{\pi}{3}20^3 = \frac{8000\pi}{3}$ metros cúbicos de água no cone.

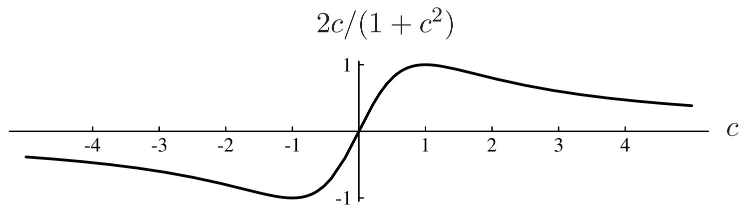
e) Se a altura de água é inferior a 10 metros, então a quantidade de água que entra no cone (1 metro cúbico por segundo) é superior à quantidade de água que sai do cone ($0.1h$ metros cúbicos por segundo) e, portanto,

a altura de água no cone aumenta. Se a altura de água é superior a 10 metros, então a quantidade de água que entra no cone é inferior à quantidade de água que sai do cone e a altura de água no cone diminui. Se a altura de água é igual a 10 metros, então a quantidade de água que entra no cone é igual à quantidade de água que sai do cone e a altura de água no cone mantém-se constante.
Se a altura de água é muito elevada, então a altura de água dentro do cone decresce lentamente, apesar de sair um grande caudal de água do cone, porque a secção do cone aumenta com a altura (raio do cone = altura do cone).
Se a altura de água é próxima de 10 metros, mas diferente de 10 metros, então a altura de água dentro do cone varia lentamente, porque a quantidade de água que sai do cone é próxima da quantidade de água que entra no cone.
Por fim, se inicialmente a altura é nula, então a taxa de variação da altura de água no cone começa por ser muito elevada (é até infinita no instante inicial) porque a secção do cone é muito pequena próximo do vértice.

f) A equação $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\frac{1-0.1h}{h^2}$ é separável. $h \equiv 10$ é solução da equação. Se $h(t_0) = h_0 \neq 10$, então h nunca assume o valor 10, devido à unicidade de solução. Nesse caso podemos escrever $\frac{h^2}{1-0.1h}\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}$. Racionalizando a fracção obtém-se $\left(-10h - 100 + \frac{100}{1-0.1h}\right)\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}$. Integrando, $[-5h^2 - 100h - 1000\ln|1-0.1h|] - [-5h_0^2 - 100h_0 - 1000\ln|1-0.1h_0|] = \frac{1}{\pi}(t-t_0)$. Como cada solução não identicamente igual a 10 é sempre superior a 10 ou sempre inferior a 10, podemos escrever $-5(h^2-h_0^2) - 100(h-h_0) - 1000\ln\frac{1-0.1h}{1-0.1h_0} = \frac{1}{\pi}(t-t_0)$.

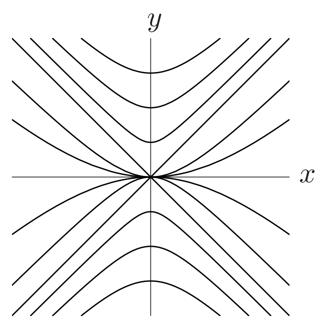
4.

a) A equação não permite determinar o declive das soluções que passam pela origem $(x,y) = (0,0)$.
Resolvendo para y', obtém-se $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. O declive das soluções é nulo sobre o eixo dos y's ($x = 0$).
Tirando partido do segundo membro ser uma função homogénea, escrevemos $y' = \frac{2(y/x)}{1+(y/x)^2} = \frac{2c}{1+c^2}$, onde $c = y/x$. Ou seja, o declive das soluções é constante quando c é constante, isto é, sobre rectas que passam pela origem.
Na figura seguinte faz-se um esboço do gráfico da função $c \mapsto \frac{2c}{1+c^2}$:



$c \mapsto \frac{2c}{1+c^2}$.

A função y' anula-se sobre os eixos coordenados; tem um máximo absoluto em $x = y$, que vale 1; e tem um mínimo absoluto em $x = -y$, que vale -1.
$y = 0$, $y = x$ e $y = -x$ são soluções da equação diferencial.
Na figura seguinte faz-se um esboço das soluções da equação diferencial:



Esboço das soluções de $2xy - (x^2 + y^2)y' = 0$.

b) A equação é da forma $M + Ny' = 0$, com $M(x, y) = 2xy$ e $N(x, y) = -(x^2 + y^2)$. A equação não é exacta porque $M_y \neq N_x$.
Multiplicando a equação por μ obtém-se $\mu M + \mu N y' = 0$. Para que esta equação seja exacta devemos ter $(\mu M)_y = (\mu N)_x$, ou seja, $\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$.
Se $\mu = \mu(x)$, então $\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$. No caso presente segue-se que $\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{4x}{-(x^2+y^2)}$. Tal como o primeiro membro, o segundo membro deveria ser apenas função de x. Conclui-se que a equação não admite um factor integrante que seja apenas função de x.
Se $\mu = \mu(y)$, então $\frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M}$. No caso presente segue-se que $\frac{\mu_y}{\mu} = -\frac{2}{y}$. Determinemos uma solução desta equação. Como $\ln|\mu| = -2\ln|y| + k$, onde k é constante, podemos tomar $\mu = \frac{1}{y^2}$.
Note-se que $y \equiv 0$ é solução da equação. Da unicidade, garantida pelo Teorema de Picard para $(x, y) \neq (0, 0)$, que é a região onde $(x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2+y^2}$ é de classe C^1, conclui-se que uma solução que passe por (x_0, y_0) com $y_0 \neq 0$ nunca tem ordenada nula, excepto possivelmente se passar pela origem.
A equação $\mu M + \mu N y' = \frac{2x}{y} - \left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) y' = 0$ é exacta.

Determinemos ϕ tal que $\frac{d}{dx}\phi(x,y) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,y' = \frac{2x}{y} - \left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)y'$.
Obtém-se $\phi(x,y) = \frac{x^2}{y} - y - c$, com $c \in \mathbb{R}$.
Portanto, $\frac{x^2}{y} - y = c$, com $c \in \mathbb{R}$, são soluções da equação diferencial.
Resolvendo para x em função de y, obtém-se $x = \pm\sqrt{y^2+cy}$.
Resolvendo para y em função de x, obtém-se $y = \frac{-c\pm\sqrt{c^2+4x^2}}{2}$. Note-se que $|c| \leq \sqrt{c^2+4x^2}$. Logo, no semiplano superior $y = \frac{-c+\sqrt{c^2+4x^2}}{2}$, enquanto no semiplano inferior $y = \frac{-c-\sqrt{c^2+4x^2}}{2}$.
Seja $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. O Teorema de Picard garante existência e unicidade de solução local para $y' = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. As soluções são as obtidas acima. Para estudar a unicidade global há que analisar quais as soluções que passam em $(0,0)$.
Pela simetria das soluções, basta considerar o que se passa no primeiro quadrante. Se $x_0 > y_0$, então $\frac{x_0^2}{y_0} - y_0 > 0$, enquanto que se $x_0 < y_0$, então $\frac{x_0^2}{y_0} - y_0 < 0$. Por outro lado, para $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$, o valor de y para $x = 0$ é 0 se $x_0 > y_0$, e é $-\frac{x_0^2}{y_0} + y_0$ se $x_0 < y_0$.
Esta análise conduz aos resultados seguintes, conforme o esboço de soluções:

- Se $|y_0| > |x_0|$, então há apenas uma solução da equação diferencial que passa por (x_0,y_0). O c correspondente é $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$.
- Se $|x_0| \geq |y_0|$, então a equação diferencial tem infinitas soluções que passam no ponto (x_0,y_0). Se $y_0 = 0$, então $y \equiv 0$, para x com o sinal de x_0; podemos considerar que este caso corresponde a $c = \infty$. Se $y_0 \neq 0$, deverá ser $c = \frac{x_0^2}{y_0} - y_0$ para x com o sinal de x_0. Mas o valor de c não está univocamente determinado para x com sinal contrário ao de x_0.

c) Já vimos na alínea **a)** que $y' = \frac{2v}{1+v^2}$, com $v = \frac{y}{x}$, desde que $x \neq 0$.
Como $y = xv$, temos também $y' = v + xv'$. Logo, $xv' = \frac{2v}{1+v^2} - v = \frac{v(1-v^2)}{1+v^2}$.
$v \equiv 0$, $v \equiv 1$ e $v \equiv -1$ são soluções desta equação.
Para $v \neq 0$, $v \neq 1$, $v \neq -1$ e $x \neq 0$, a equação diferencial para v pode escrever-se $\left(\frac{1}{v-1} + \frac{1}{v+1} - \frac{1}{v}\right)v' = -\frac{1}{x}$. Integrando, $\ln\left|\frac{v^2-1}{v}\right| - \ln\left|\frac{v_0^2-1}{v_0}\right| = -\ln|x| + \ln|x_0|$, para $v_0 \neq 1$, $v_0 \neq -1$ e $v_0 \neq 0$. Então $x\frac{v^2-1}{v} = x_0\frac{v_0^2-1}{v_0}$.
Substituindo $v = y/x$ e $v_0 = y_0/x_0$, vem $y - \frac{x^2}{y} = y_0 - \frac{x_0^2}{y_0}$, para $x_0 \neq y_0$, $x_0 \neq -y_0$ e $y_0 \neq 0$. Esta expressão é também válida para $x_0 = y_0$ e $x_0 = -y_0$, embora a sua dedução não o seja. De facto, se $x_0 = y_0$ ou $x_0 = -y_0$, então $y_0 - \frac{x_0^2}{y_0} = 0$ e a expressão reduz-se a $y - \frac{x^2}{y} = 0$, ou

seja, $x^2 = y^2$.
Confirma-se assim o resultado da alínea anterior.

5. O princípio de máximo (fraco) afirma que nas condições do enunciado $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} \varphi = \max_{\partial\Omega} u$. Vamos fazer a prova deste resultado por contradição.
É óbvio que $\max_{\bar{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u$. Suponhamos que $\max_{\bar{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$, digamos $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u + \delta$, com $\delta > 0$. Seja ϵ tal que $\max_{\partial\Omega} \epsilon||x||^2 < \delta$ e $v = u + \epsilon||x||^2$. Note-se que $\max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \max_{\partial\Omega} \epsilon||x||^2 < \max_{\partial\Omega} u + \delta = \max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} v$ e que $\Delta v = \Delta u + 2n\epsilon \geq 2n\epsilon > 0$.
Se $\bar{x} \in \Omega$ é tal que $v(\bar{x}) = \max_{\bar{\Omega}} v$, tem-se que $\Delta v(\bar{x}) \leq 0$, porque cada uma das derivadas $v_{x_i x_i}(\bar{x}) \leq 0$, $i = 1, 2$. Isto é uma contradição. Portanto $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

Análise Matemática IV

1º Teste - 29 de Outubro de 2005

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1.

a) Verifique se $\{(\sqrt[3]{z})^2\} = \{\sqrt[3]{z^2}\}$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. (2)

Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = r^{2/3}e^{2i\theta/3}$ para $r \geq 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$.

b) Usando a equação de Cauchy-Riemann na forma polar, $f_r = -\frac{i}{r}f_\theta$, e $f' = e^{-i\theta}f_r$, estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada. (2)

c) Escreva uma representação paramétrica do segmento γ que une 1 a i. (1)

d) Dê a definição de $\int_\gamma f'(z)\, dz$ em termos de um integral onde intervenha a representação paramétrica de γ. (1)

e) Calcule o integral da alínea anterior, apresentando o resultado na forma cartesiana. (2)

f) Para que curvas fechadas $\hat{\gamma}$ em $\mathbb{C}$ garante o Teorema de Cauchy que $\int_{\hat{\gamma}} f(z)\, dz = 0$? (2)

2.

a) Classifique as singularidades de $z \mapsto \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}$ e calcule os resíduos nas que se situam no semiplano superior. (3)

b) Usando o Teorema dos Resíduos, calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\, dx$. (3)

3. Determine geometricamente a imagem da região $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \Re z < 0 \text{ e } \Im z > 0\}$ pela transformação $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$. (4)

Análise Matemática IV

1º Teste - 29 de Outubro de 2005

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

Resolução

1.

a) Seja $z = re^{i\theta}$.

$$\{\sqrt[3]{z}\} = \{\sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}, \sqrt[3]{r}e^{i(\theta/3+2\pi/3)}, \sqrt[3]{r}e^{i(\theta/3+4\pi/3)}\},$$

$$\begin{aligned}\{(\sqrt[3]{z})^2\} &= \{\sqrt[3]{r^2}e^{i2\theta/3}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+4\pi/3)}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+8\pi/3)}\}\\ &= \{\sqrt[3]{r^2}e^{i2\theta/3}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+4\pi/3)}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+2\pi/3)}\},\end{aligned}$$

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta},$$

$$\{\sqrt[3]{z^2}\} = \{\sqrt[3]{r^2}e^{i2\theta/3}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+2\pi/3)}, \sqrt[3]{r^2}e^{i(2\theta/3+4\pi/3)}\}.$$

Portanto, $\{(\sqrt[3]{z})^2\} = \{\sqrt[3]{z^2}\}$ para todo o $z \in \mathbb{C}$.

b) A função f tem derivadas parciais contínuas em ordem a r e θ em $S := \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0 \text{ e } -\pi < \theta < \pi\}$. É descontínua em $\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r > 0 \text{ e } \theta = \pi\}$, porque quando z cruza o eixo real negativo, no sentido directo, o seu argumento principal salta de -2π, e consequentemente o argumento de $f(z)$ salta de $-4\pi/3$. Assim, basta provar que f satisfaz a equação de Cauchy-Riemann em S para provar a sua diferenciabilidade em S.

$$\begin{aligned}f_r(re^{i\theta}) &= \frac{2}{3}r^{-1/3}e^{2i\theta/3}\\ f_\theta(re^{i\theta}) &= \frac{2}{3}ir^{2/3}e^{2i\theta/3}\end{aligned}$$

Estas igualdades implicam que $f_r(re^{i\theta}) = -\frac{i}{r}f_\theta(re^{i\theta})$ em S. Conclui-se que f é diferenciável em S. Tem-se

$$f'(re^{i\theta}) = e^{-i\theta}f_r(re^{i\theta}) = \frac{2}{3}r^{-1/3}e^{-i\theta/3},$$

ou seja, $f'(z) = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{z}}$, com $\sqrt[3]{re^{i\theta}} = r^{1/3}e^{i\theta/3}$ para $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$. Por outro lado, f não é diferenciável no complementar de S, porque não tem derivada parcial em ordem a r em zero, e porque é descontínua no eixo real negativo.

c) Uma representação paramétrica é dada por $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, definida por $\gamma(t) = (1-t) + ti$.

d) $\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{2}{3}\frac{(-1+i)}{\sqrt[3]{(1-t)+ti}}\,dt.$

e) $\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_0^1 f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}[f(\gamma(t))]dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(i) - f(1) = (e^{i\pi/2})^{2/3} - (e^{i0})^{2/3} = e^{i\pi/3} - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

f) O Teorema de Cauchy garante que $\int_{\hat{\gamma}} f(z)\,dz = 0$ para curvas fechadas $\hat{\gamma}$ que não cruzem o eixo real negativo ou zero, ou seja, para curvas em S (S como na resolução da alínea b)), porque f é holomorfa em S e S é simplesmente conexo.

2.

a) Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-3i, -i, i, 3i\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+3i)(z-3i)}$. Tem-se,

$$f(z) = \frac{1}{z-i}g(z), \text{ com } g(z) = \frac{1}{(z+i)(z^2+9)}.$$

Sendo g holomorfa em torno de i, admite desenvolvimento em série de Taylor em torno de i:

$$g(z) = g(i) + g'(i)(z-i) + \frac{1}{2!}g''(i)(z-i)^2 + \dots,$$

para $|z-i| < 2$. Ora, $g(i) = -\frac{i}{16}$, pelo que

$$f(z) = \frac{-i/16}{z-i} + g'(i) + \frac{1}{2!}g''(i)(z-i) + \dots,$$

para $0 < |z-i| < 2$. Do mesmo modo, tem-se

$$f(z) = \frac{1}{z-3i}h(z), \text{ com } h(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+3i)}.$$

Sendo h holomorfa em torno de $3i$, admite desenvolvimento em série de Taylor em torno de $3i$:

$$h(z) = h(3i) + h'(3i)(z-3i) + \frac{1}{2!}h''(3i)(z-3i)^2 + \dots,$$

para $|z-3i| < 2$. Ora, $h(3i) = \frac{i}{48}$, pelo que

$$f(z) = \frac{i/48}{z-3i} + h'(3i) + \frac{1}{2!}h''(3i)(z-3i) + \dots,$$

para $0 < |z-3i| < 2$. Estas séries de Laurent mostram que f tem pólos simples i e $3i$, sendo $\text{Res}_{z=i} f(z) = -\frac{i}{16}$ e $\text{Res}_{z=3i} f(z) = \frac{i}{48}$. Claramente, a função f tem também pólos simples em $-i$ e $-3i$, não tendo mais nenhuma outra singularidade.

b) Seja $R > 3$ e γ um contorno fechado formado pela união do segmento de recta que une $-R$ e R com a semi-circunferência centrada na origem no semiplano superior descrita no sentido directo. Pelo Teorema dos Resíduos,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}_{z=i}\, f(z) + \mathrm{Res}_{z=3i}\, f(z)) = 2\pi i\left(-\frac{i}{24}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Logo,

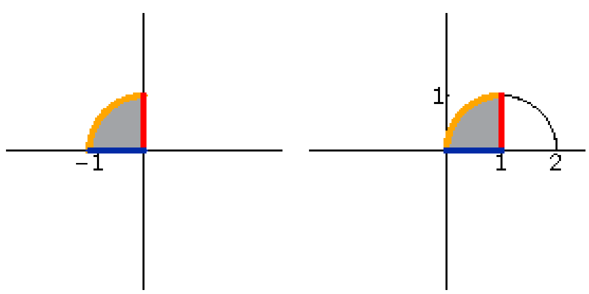
$$\frac{\pi}{12} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\,dz. \quad (*)$$

O cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando $R \to +\infty$:

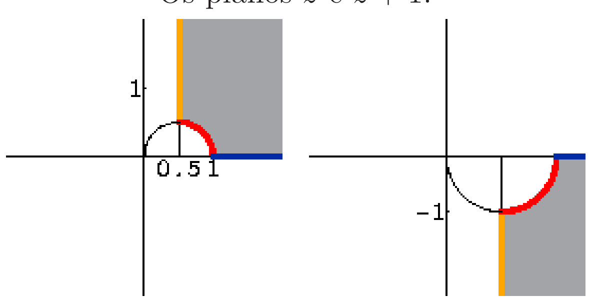
$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=R\wedge \Im z>0} f(z)\,dz\right| &\leq \int_{|z|=R\wedge \Im z>0} \frac{1}{(R^2-1)(R^2-9)}|dz| \\ &= \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-9)} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty.\end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os membros de $(*)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx = \frac{\pi}{12}$.

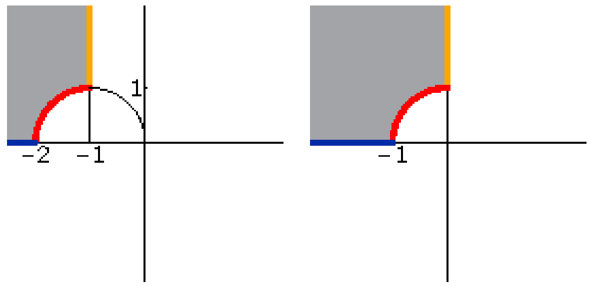
3. Tem-se $\frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1}$.



Os planos z e $z+1$.



Os planos $\frac{1}{z+1}$ e $\frac{2}{z+1}$.



Os planos $-\frac{2}{z+1}$ e $1-\frac{2}{z+1}$.

A imagem é $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1,\ \Re z < 0 \text{ e } \Im z > 0\}$.

Análise Matemática IV

5 de Janeiro de 2006

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

2º Teste – Perguntas 1 a 4 – **1 h e 40 min**

1º Exame – Todas as perguntas – **3 horas**

Apresente os cálculos

1. Considere a equação
$$y' - y = 1.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das suas soluções. (1)

b) Determine as suas soluções. (1.5)

2. Considere o problema de valor inicial
$$y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$$

a) Resolva a equação diferencial e determine a solução que satisfaz as condições inicias dadas. (1)

b) Escreva a equação na forma de um sistema 2×2, $\dot{x} = Ax$, e determine e^{At}. (1.5)

c) Use a alínea anterior para confirmar a resposta à alínea a). (1)

3. Determine uma solução de (2.5)
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{se } 0 < x < \pi \text{ e } t > 0, \\ u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0 & \text{se } t > 0, \\ u(x,0) = \cos(2x) - 3\cos(4x) & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

4. Determine a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, (1.5)
$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi \leq x < 0, \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

5. Estude a diferenciabilidade da função $z \mapsto e^{iz}$ usando as equações de Cauchy-Riemann, e calcule a sua derivada. (2)

6. Calcule geometricamente a imagem da região $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \text{ e } \Im z > 0\}$ pela transformação $z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$. (2)

7. Calcule os desenvolvimentos em série de Laurent em torno do ponto zero de $z \mapsto \frac{1}{z-3}$, indicando as regiões onde são válidos. (2)

8. Calcule usando integrais de contorno $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+4}\, dx$. (3)

9. Seja f analítica e limitada em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pode concluir mais alguma coisa sobre a função f? Justifique. (1)

Análise Matemática IV

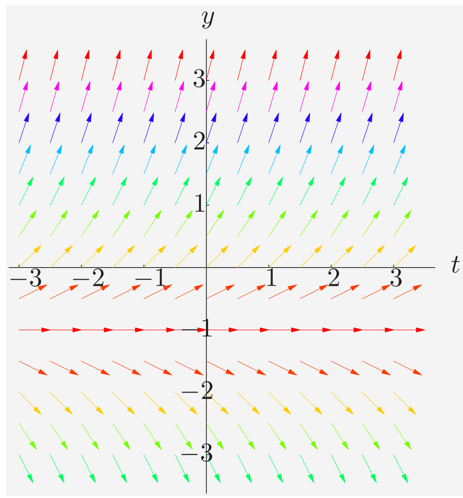
1º Exame - 5 de Janeiro de 2006

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

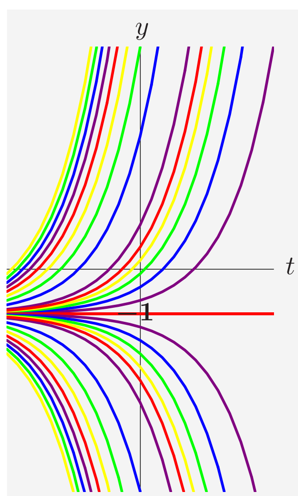
Resolução

1.

a)



Campo de direcções de $y' = y + 1$.



Esboço dos gráficos das soluções de $y' = y + 1$.

b) 1^a *resolução (encarando a equação como linear).* Um factor de integração é $\mu(t) = e^{\int(-1)\,dt} = e^{-t}$. Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por μ,

$$e^{-t}y' - e^{-t}y = e^{-t},$$

ou
$$\frac{d}{dt}(e^{-t}y) = e^{-t}.$$
Integrando ambos os membros entre t_0 e t,
$$e^{-t}y(t) - e^{-t_0}y(t_0) = -e^{-t} + e^{-t_0}.$$
Donde,
$$y(t) = (y(t_0) + 1)e^{t-t_0} - 1.$$

2^a *resolução (encarando a equação como separável).* A função $y(t) \equiv -1$ é solução da equação diferencial. Pela unicidade de solução, ou a função y é identicamente -1, ou então nunca é igual a -1. Neste caso,
$$\frac{y'}{y+1} = 1.$$
Integrando ambos os membros entre t_0 e t,
$$\log\left|\frac{y(t)+1}{y(t_0)+1}\right| = t - t_0.$$
Como os gráficos das soluções não cruzam a recta $y = -1$, novamente devido à unicidade de solução, $y(t_0) < -1 \Rightarrow y(t) < -1$ e $y(t_0) > -1 \Rightarrow y(t) > -1$. Podemos então tirar o módulo na igualdade acima:
$$\log\left(\frac{y(t)+1}{y(t_0)+1}\right) = t - t_0.$$
Tomando a exponencial de ambos os membros,
$$y(t) + 1 = (y(t_0) + 1)e^{t-t_0}.$$
Acontece que esta expressão também é válida para $y(t_0) = -1$. Logo,
$$y(t) = (y(t_0) + 1)e^{t-t_0} - 1.$$

2.

a) Trata-se de uma equação linear homogénea de segunda ordem com coeficientes constantes pelo que vamos procurar soluções da forma $y(t) = e^{rt}$. Substituindo na equação diferencial e dividindo por e^{rt},
$$r^2 + 2r - 8 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r+4) = 0.$$

A solução geral da equação diferencial é

$$y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{2t}.$$

Para que sejam satisfeitas as condições iniciais, $c_1+c_2 = 1$ e $-4c_1+2c_2 = 2$. Este sistema conduz a $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. A solução que satisfaz as condições iniciais dadas é $y(t) = e^{2t}$.

b) Fazendo $x_1 = y$ e $x_2 = y'$,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

que é da forma $\dot{x} = Ax$. O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A\,\lambda + \det A = \lambda^2 + 2\lambda - 8$, pelo que A tem valores próprios -4 e 2. Resolvendo a equação $(A+4I)v = 0$ conclui-se que $v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ é um vector próprio associado ao valor próprio -4 e resolvendo a equação $(A-2I)v = 0$ conclui-se que $v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vector próprio associado ao valor próprio 2. Considerando a matriz

$$S = [v_1\ v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix},$$

que tem inversa

$$S^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

tem-se que

$$A = S \Lambda S^{-1},$$

com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{At} &= S e^{\Lambda t} S^{-1} = S \begin{bmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} S^{-1} \\ &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2e^{-4t} + 4e^{2t} & -e^{-4t} + e^{2t} \\ -8e^{-4t} + 8e^{2t} & 4e^{-4t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

c) Como $x(t) = e^{At} x_0 = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$y(t) = x_1(t) = \frac{1}{6}[(2e^{-4t} + 4e^{2t}) + 2(-e^{-4t} + e^{2t})] = e^{2t},$$

o que confirma o resultado da alínea a).

3. Vamos procurar soluções de $u_t = u_{xx}$ da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo na equação diferencial, $XT' = X''T$, ou $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}$. Conclui-se que ambos os membros da última igualdade são uma mesma constante, constante essa que designaremos por $-\lambda$. Tem-se $X'' + \lambda X = 0$ e $T' = -\lambda T$. Das condições fronteira para u, $u_x(0,t) = X'(0)T(t) = 0$ e $u_x(\pi,t) = X'(\pi)T(t) = 0$. Uma vez que não queremos $T(t) \equiv 0$ (porque isso conduziria a $u(x,t) \equiv 0$), tiramos $X'(0) = X'(\pi) = 0$. As soluções não nulas de

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \text{ em } 0 < x < \pi, \\ X'(0) = X'(\pi) = 0, \end{cases}$$

podem ser indexadas em $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{cases} \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\pi^2} = n^2, \\ X_n(x) = c_n \cos(nx), \end{cases}$$

onde os c_n's são constantes. Agora a equação $T' = -n^2 T$, conduz a $T(t) = d_n e^{-n^2 t}$, onde os d_n's são constantes. Fazendo o produto de X_n por T_n, obtém-se

$$u_n(x,t) = a_n e^{-n^2 t} \cos(nx),$$

com $a_n = c_n d_n$. Cada uma destas funções u_n satisfaz a equação diferencial com as condições fronteiras impostas, logo

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n^2 t} \cos(nx)$$

é também uma solução formal da equação diferencial com as condições fronteiras impostas. Para satisfazer a condição inicial vamos impor que

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) = \cos(2x) - 3\cos(4x).$$

Pelo facto de as funções $x \mapsto \cos(nx)$ serem ortogonais em $L^2(-\pi,\pi)$, tira-se que $a_2 = 1$, $a_4 = -3$, sendo todos os restantes a_n's nulos. Substituindo na expressão para $u(x,t)$,

$$u(x,t) = e^{-4t}\cos(2x) - 3e^{-16t}\cos(4x).$$

Verifica-se facilmente que esta é uma solução da equação diferencial com as condições fronteira e iniciais dadas.
Observação. Usando o método da energia pode provar-se unicidade.

4.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right],$$

com

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Como a função f é ímpar, todos os a_n's são nulos e

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin(nx)\, dx = \frac{2}{n}[-\cos(n\pi) + 1] = \begin{cases} \frac{4}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

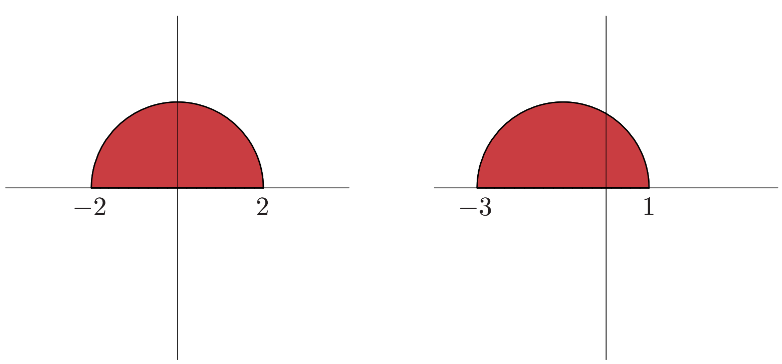
Para $0 < |x| < \pi$,

$$f(x) = 4 \left[\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right],$$

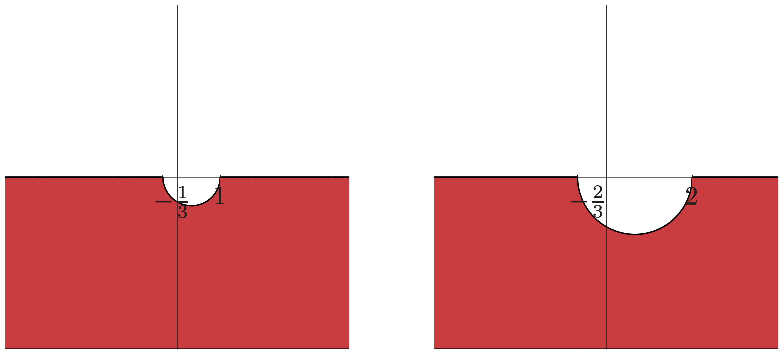
onde a série do segundo membro converge pontualmente. Para $x = 0$, a soma da série vale 0 enquanto $f(0) = \pi$. Também para $x = \pm\pi$ a soma da série vale 0 enquanto $f(-\pi) = -\pi$, $f(\pi) = \pi$.

5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{ix-y}$, onde $z = x+iy$. Então $f_x(z) = ie^{iz}$ e $f_y(z) = -e^{iz}$. Como f tem derivadas parciais contínuas e as derivadas satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$, a função f é diferenciável. A sua derivada é $f'(z) = f_x(z) = ie^{iz}$.

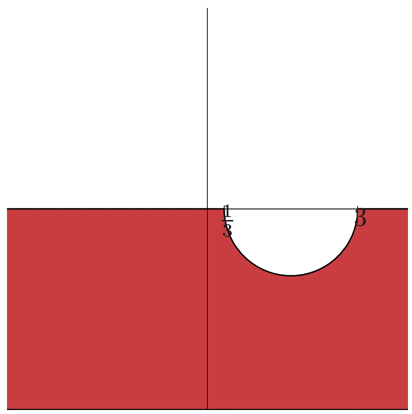
6. $\frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1}$.



Os planos z e $z - 1$.



Os planos $\frac{1}{z-1}$ e $\frac{2}{z-1}$.



O plano $1+\frac{2}{z-1}$.

7.

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-z/3}\right) = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \text{ para } \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 3.$$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-3/z}\right) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} \text{ para } \left|\frac{3}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| > 3.$$

8. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)} = \frac{e^{iz}}{(z+2i)(z-2i)}$. Tem-se,

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-2i}, \text{ com } g(z) = \frac{e^{iz}}{(z+2i)}.$$

A função g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-2i\}$. Seja $R > 2$ e γ um contorno fechado formado pela união do segmento de recta que une $-R$ e R com a semi-circunferência centrada na origem no semiplano superior, descrita no sentido directo. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i g(2i) = \frac{\pi}{2}e^{-2}.$$

Logo,

$$\frac{\pi}{2}e^{-2} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{|z|=R\wedge\Im z>0} f(z)\,dz. \quad (*)$$

Como $|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y} \leq 1$ para $y = \Im z \geq 0$, o cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando $R \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \left|\int_{|z|=R\wedge\Im z>0} f(z)\,dz\right| &\leq \int_{|z|=R\wedge\Im z>0} \frac{1}{(R^2-4)}|dz| \\ &= \frac{\pi R}{(R^2-4)} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty. \end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os membros de $(*)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-2}$. Finalmente, tomando as partes reais, $\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-2}$.

9. A função f tem uma singularidade removível na origem porque $\lim_{z\to 0}[zf(z)] = 0$. Logo a extensão, $\bar{f}$, de f a $\mathbb{C}$,

$$\bar{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \neq 0, \\ \lim_{z\to 0} f(z) & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

é inteira. A extensão é também limitada porque f é limitada. Pelo Teorema de Liouville, $\bar{f}$ é constante. Conclui-se que f é constante em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Análise Matemática IV

2º Exame - 19 de Janeiro de 2006

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Resolva a equação diferencial $y'' - 4y' + 4y = e^{2t}$. (1)

2. Seja $c > 0$. Determine a solução de (3)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{em }]0,\pi[\times]0,+\infty[, \\ u(0,t) = 0, \; u(\pi,t) = 0 \quad \text{para } t > 0, \\ u(x,0) = \sin(x), \; u_t(x,0) = \sin(2x) \quad \text{para } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

3. Determine a série de cosenos de $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, definida por (2)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

4. Considere a equação diferencial

$$y' = e^{y-t}.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das suas soluções. (2)

b) Determine analiticamente a solução com condição inicial $y(t_0) = y_0$. (1)

c) Suponha que $t_0 = 0$ e $y_0 < 0$. Para que valor de y_0 o gráfico da solução tem como assímptota o eixo dos t's? (1)

d) Suponha que $t_0 < 0$ e $y_0 = 0$. Determine o intervalo máximo de existência da solução. (1)

5. Estude a diferenciabilidade da função $z \mapsto \overline{z}^2$ e calcule a sua derivada quando existir. (1)

6. Calcule $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$, onde γ é o arco $\{(t, t^2 - 1), \; -1 \le t \le 1\}$ percorrido de -1 a 1. *Sugestão:* Use o Teorema Fundamental do Cálculo, ou em alternativa use o Teorema de Cauchy e substitua a curva dada por outra que conduza a cálculos mais simples. (2)

7. Calcule o desenvolvimento em série de Laurent em torno do ponto zero de $z \mapsto \frac{\sin z - z}{z^6}$, indicando a região onde é válido. Classifique as singularidades e calcule os resíduos da função. (2)

8. Calcule usando integrais de contorno $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx$. (2)

9. Considere a região $S = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 1 \text{ e } 0 < \Im z < \pi\}$.

a) Calcule geometricamente a imagem de S por $z \mapsto e^z$. (1)

b) Calcule geometricamente a imagem de S por $z \mapsto \frac{e}{e^z + e}$. (1)

Análise Matemática IV

2º Exame - 19 de Janeiro de 2006

LEA, LEC, LEEC, LEFT, LEN e LMAC

Resolução

1.

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad (D-2)^2 y = e^{2t} \quad \Rightarrow \quad (D-2)^3 y = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad y = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 t^2 e^{2t},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Substituindo estas funções na equação original obtém-se

$$(2c_3 e^{2t} + 8c_3 t e^{2t} + 4c_3 t^2 e^{2t}) - 4(2c_3 t e^{2t} + 2c_3 t^2 e^{2t}) + 4(c_3 t^2 e^{2t}) = e^{2t},$$

ou seja, $c_3 = 1/2$. Concluímos que as soluções da equação dada são

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{t^2}{2} e^{2t},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Vamos procurar soluções de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituindo na equação diferencial, $XT'' = c^2 X'' T$, ou $\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X}$. Conclui-se que ambos os membros da última igualdade são uma mesma constante, constante essa que designaremos por $-\lambda$. Tem-se $X'' + \lambda X = 0$ e $T'' = -\lambda c^2 T$. Das condições fronteira para u, vem $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$ e $u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0$. Uma vez que não queremos $T(t) \equiv 0$ (porque isso conduziria a $u(x,t) \equiv 0$), tiramos $X(0) = X(\pi) = 0$. As soluções não nulas de

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \text{ em }]0,\pi[, \\ X(0) = X(\pi) = 0, \end{cases}$$

podem ser indexadas em $n \in \mathbb{N}_1$:

$$\begin{cases} \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\pi^2} = n^2, \\ X_n(x) = c_n \sin(nx), \end{cases}$$

onde os c_n's são constantes. Agora a equação $T'' = -n^2 c^2 T$, conduz a $T(t) = d_n \cos(nct) + e_n \sin(nct)$, onde os d_n's e os e_n's são constantes. Fazendo o produto de X_n por T_n, obtém-se

$$u_n(x,t) = \sin(nx)[a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)],$$

com $a_n = c_n d_n$ e $b_n = c_n e_n$. Cada uma destas funções u_n satisfaz a equação diferencial com as condições fronteiras impostas, logo

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx)[a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)]$$

é também uma solução formal da equação diferencial com as condições fronteiras impostas. Para satisfazer as condições iniciais vamos impor que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx) = \sin(x),$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n nc \sin(nx) = \sin(2x),$$

Pelo facto de as funções $x \mapsto \sin(nx)$ serem ortogonais em $L^2(0,\pi)$, tira-se que $a_1 = 1$, $b_2 = 1/(2c)$, sendo todos os restantes a_n's e b_n's nulos. Substituindo na expressão para $u(x,t)$,

$$u(x,t) = \sin(x)\cos(ct) + \frac{1}{2c}\sin(2x)\sin(2ct)$$

Verifica-se facilmente que esta é uma solução da equação diferencial com as condições fronteira e iniciais dadas. Foi provado nas aulas que o problema posto tem uma única solução usando o método da energia.

3. Consideremos a extensão par, $\bar{f}$, de f ao intervalo $[-2,2]$. Sabemos que

$$\bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\Big(\frac{n\pi x}{2}\Big) + b_n \sin\Big(\frac{n\pi x}{2}\Big)\right],$$

com

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \bar{f}(x)\cos\Big(\frac{n\pi x}{2}\Big)\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \bar{f}(x)\sin\Big(\frac{n\pi x}{2}\Big)\,dx.$$

Sendo a função $\bar{f}$ par, todos os b_n's são nulos e

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 \bar{f}(x)\cos\Big(\frac{n\pi x}{2}\Big)\,dx = \int_1^2 \cos\Big(\frac{n\pi x}{2}\Big)\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[\sin(n\pi) - \sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)\right] \\ &= -\frac{2}{n\pi}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}(-1)^{(n+1)/2} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par não nulo.} \end{cases} \end{aligned}$$

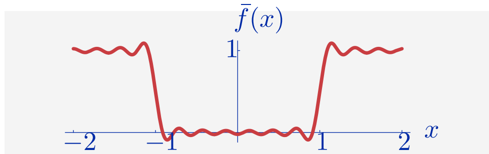
O valor de a_0 é

$$a_0 = \int_1^2 1\,dx = 1.$$

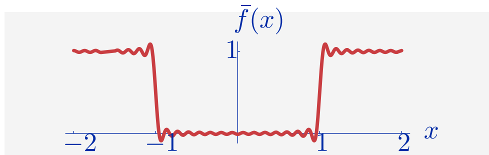
Para $|x| \le 2$ e $x \ne \pm 1$,

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(\pi x/2)}{1} - \frac{\cos(3\pi x/2)}{3} + \frac{\cos(5\pi x/2)}{5} - \dots\right],$$

onde a série do segundo membro converge pontualmente. Para $x = \pm 1$, a soma da série vale $1/2$ enquanto $\bar{f}(\pm 1) = 1$. Restringindo x ao intervalo $[0, 2]$ obtém-se a série de cosenos de f.



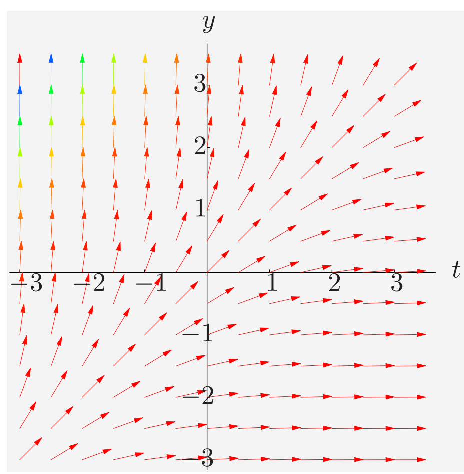
Esboço do gráfico de $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k-1} \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right]}{2k-1}$.



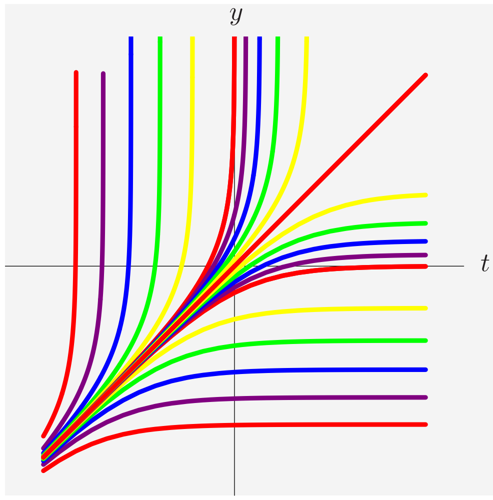
Esboço do gráfico de $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{15} (-1)^{k-1} \frac{\cos\left[\frac{(2k-1)\pi x}{2}\right]}{2k-1}$.

4.

a)



Campo de direcções de $y' = e^{y-t}$.



Esboço dos gráficos das soluções de $y' = e^{y-t}$.

b) A equação é separável:

$$e^{-y}y' = e^{-t}.$$

Integrando ambos os membros entre t_0 e t,

$$e^{-y(t)} - e^{-y(t_0)} = e^{-t} - e^{-t_0} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = -\log(e^{-y_0} + e^{-t} - e^{-t_0}).$$

c) Fazendo $t_0 = 0$ na expressão obtida na alínea b), obtém-se $y(t) = -\log(e^{-y_0}+e^{-t}-1)$. Como se está a supor que $y_0 < 0$, tem-se $e^{-y_0}-1 > 0$, pelo que a solução está definida em $\mathbb{R}$. Além disso,

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\log(e^{-y_0} - 1).$$

O gráfico tem como assímptota o eixo dos t's se este limite for nulo. Isto corresponde a

$$-\log(e^{-y_0} - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-y_0} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = \log\frac{1}{2}.$$

d) Fazendo $y_0 = 0$ na expressão obtida na alínea b), obtém-se

$$y(t) = -\log(e^{-t} - e^{-t_0} + 1).$$

Esta solução existe para

$$e^{-t} - e^{-t_0} + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-t} > e^{-t_0} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad t < -\log(e^{-t_0} - 1).$$

O intervalo máximo de existência da solução é $]-\infty, -\log(e^{-t_0} - 1)[$.
Observação: A última figura acima é simétrica em relação à recta

$y = t$. Mais precisamente, seja $c < 0$; se os valores y_0 da alínea c) e t_0 da alínea d) satisfazem $y_0 = c = t_0$, então os gráficos das soluções correspondentes podem ser obtidos um do outro por reflexão na recta $y = t$. Isto é consequência da simetria da equação diferencial: $e^{-y}\,dy = e^{-t}\,dt$. É por isso claro que se na alínea c) obtivémos o valor $-\log(e^{-y_0} - 1)$, na alínea d) tínhamos que obter o valor $-\log(e^{-t_0} - 1)$.

5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = \overline{z}^2 = (x - iy)^2 = (x^2 - y^2) - 2ixy.$$

Então $f_x(z) = 2x - 2iy$ e $-if_y(z) = -i(-2y - 2ix) = -2x + 2iy$. A equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$, é satisfeita para $2x = -2x \ \wedge\ -2y = 2y$, ou seja apenas no ponto $z = 0$. Portanto, f apenas pode ser diferenciável na origem. Como f tem derivadas parciais contínuas, f é de facto diferenciável em zero e $f'(0) = f_x(0) = 0$.

6. *1ª resolução.* Seja $\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$, para $r > 0$ e $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Então $\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}$ para z não pertencente à parte positiva do eixo imaginário união com zero. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \log 1 - \log(-1) = -\log(1e^{-i\pi}) = i\pi.$$

2ª resolução. Como $z \mapsto \frac{1}{z}$ é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, o Teorema de Cauchy aplicado à região $\mathbb{C} \setminus \{iy :\ y \in \mathbb{R}_0^+\}$ garante que podemos substituir o arco γ pela semi-circunferência de raio 1 centrada na origem no semiplano $\Im z \leq 0$. Esta semi-circunferência pode ser parametrizada por $e^{i\theta}$ com $\theta \in [-\pi, 0]$. Por cálculo directo,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta}\,d\theta = i\pi.$$

7. Sabemos que

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

para $z \in \mathbb{C}$, logo

$$\frac{\sin z - z}{z^6} = -\frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z} - \frac{z^3}{7!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-5}}{(2n+1)!}$$

para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Logo, zero é um pólo de ordem 3 da função com resíduo $1/5!$. A função não tem nenhuma outra singularidade para além de zero.

8. Seja $f : \mathbb{C}\setminus\{-i, i\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$. Tem-se,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2}, \text{ com } g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}.$$

A função g é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$. Seja $R > 1$ e γ um contorno fechado formado pela união do segmento de recta que une $-R$ e R com a semi-circunferência centrada na origem no semiplano superior, descrita no sentido directo. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i g'(i) = 2\pi i \left[-\frac{2}{(z+i)^3}\right]_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

Logo,

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\,dz. \quad (*)$$

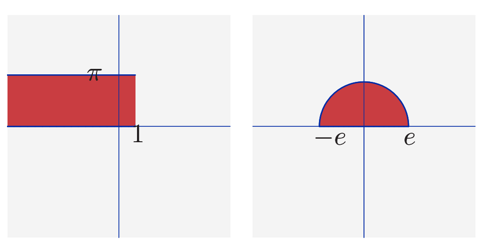
O cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando $R \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \left|\int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\,dz\right| &\le \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} \frac{1}{(R^2-1)^2}|dz| \\ &= \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty. \end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os membros de $(*)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

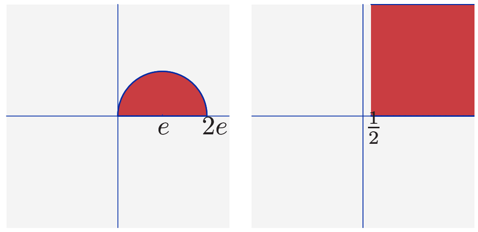
9.

a)

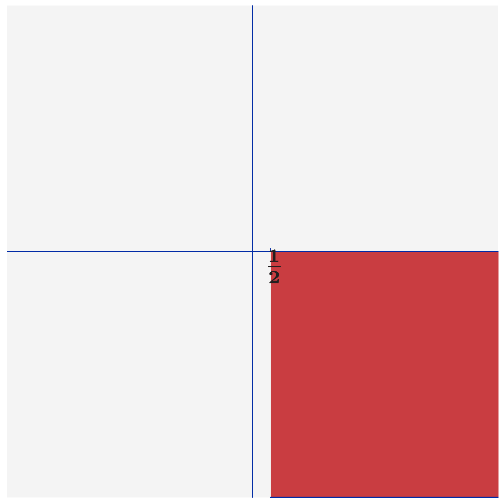


Os planos z e e^z.

b)



Os planos $e^z + e$ e $\overline{\frac{e}{e^z+e}}$.



O plano $\frac{e}{e^z+e}$.

Análise Matemática IV

1º Teste - 28 de Outubro de 2006

LEBM + LEC + LEFT + LEGM + LMAC

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = \frac{|z|e^{-|z|}}{z}.$$

a) Calcule $f(re^{i\theta})$ em termos de $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$. (1)

b) Usando a equação de Cauchy-Riemann na forma polar, $f_r = -\frac{i}{r} f_\theta$, e $f' = e^{-i\theta} f_r$, estude a diferenciabilidade de f e calcule $f'(z)$ quando existir, apresentando o resultado em termos de z. (2.5)

c) Calcule $\int_{|z|=\pi} f(z)\, dz$. (2)

d) Represente geometricamente a imagem da circunferência de centro na origem e raio 1, $r = 1$, percorrida no sentido directo, por f. (1)

e) Determine o contradomínio de f. (1)

2. Calcule justificando, sem usar o Teorema dos Resíduos,

a) (3)

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^3(z-3)}.$$

b) (3)

$$\int_{|z|=4} \left[\tfrac{-3}{(z+3)^3} + \tfrac{-2}{(z+2)^2} + \tfrac{-1}{z+1} + \pi + (z-1) + 2(z-2)^2 \right] dz.$$

3. Determine geometricamente a imagem da região $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0 \text{ e } 0 < \Im z < 2\}$ pela transformação $z \mapsto \frac{1}{z+1}$. (4.5)

4. Seja $a \in \mathbb{C}$, g inteira e sempre diferente de zero, γ uma curva fechada que não passa por a, e $f(z) = (z-a)g(z)$. Determine o valor de $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$. Justifique. (2)

Análise Matemática IV

1º Teste - 28 de Outubro de 2006

LEBM + LEC + LEFT + LEGM + LMAC

Resolução

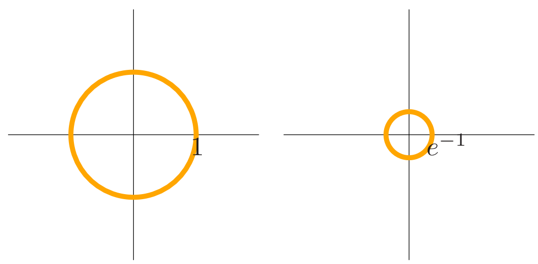
1.

a) $f(re^{i\theta}) = \frac{re^{-r}}{re^{i\theta}} = e^{-r-i\theta}$.

b) Como $f_r = -e^{-r-i\theta}$ e $f_\theta = -ie^{-r-i\theta}$, vem $f_r = -\frac{i}{r}f_\theta \Leftrightarrow -e^{-r-i\theta} = -\frac{1}{r}e^{-r-i\theta} \Leftrightarrow r = 1$. Ou seja, a função f satisfaz a equação de Cauchy-Riemann sobre $r = 1$. Por outro lado, como a função f tem derivadas parciais contínuas é diferenciável (em todo o seu domínio) como função de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ em $\mathbb{R}^2$. Conclui-se que a função complexa f é diferenciável em $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Neste conjunto, $f' = e^{-i\theta}f_r = -e^{-1}e^{-2i\theta}$, ou seja, $f'(z) = -\frac{e^{-1}}{z^2}$ para $|z| = 1$.

c) Seja $\alpha : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, definida por $\alpha(\theta) = \pi e^{i\theta}$. Por definição, $\int_{|z|=\pi} f(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha(\theta))\alpha'(\theta)\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi e^{-\pi}}{\pi e^{i\theta}} i\pi e^{i\theta}\,d\theta = 2\pi^2 e^{-\pi} i$. *Em alternativa,* $\int_{|z|=\pi} f(z)\,dz = \int_{|z|=\pi} \frac{|z|e^{-|z|}}{z}dz = \pi e^{-\pi}\int_{|z|=\pi} \frac{1}{z}dz = 2\pi^2 e^{-\pi} i$.

d)



Os planos z e $f(z)$.
A circunferência no plano $f(z)$ é percorrida
no sentido dos ponteiros do relógio.

e) O contradomínio de f é $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$. De facto, f transforma circunferências de raio r em circunferências de raio e^{-r}, e $r > 0 \Leftrightarrow 0 < e^{-r} < 1$.

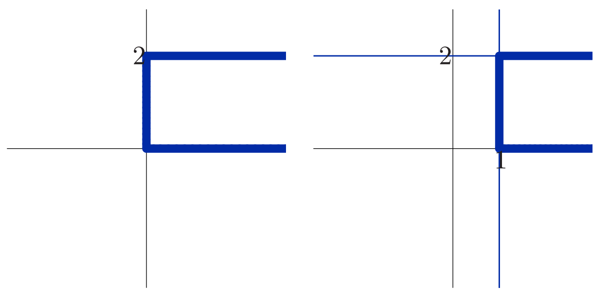
2.

a) Pela Fórmula Integral de Cauchy,

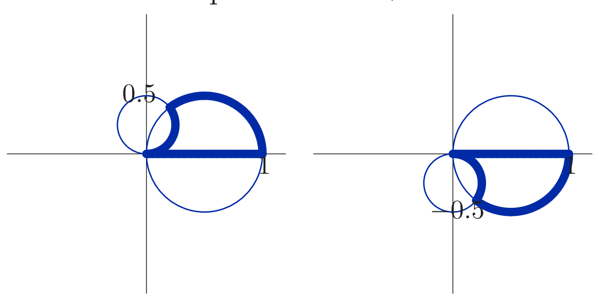
$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z+1)^3(z-3)} = \frac{2\pi i}{2!}\,\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z-3}\bigg|_{z=-1} = \frac{2\pi i}{(z-3)^3}\bigg|_{z=-1} = -\frac{\pi}{32}i.$$

b) Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o integral das duas primeiras parcelas é zero porque essas parcelas são as derivadas das funções $\frac{3}{2(z+3)^2}$ e $\frac{2}{z+2}$, holomorfas em $\mathbb{C} \setminus \{-3\}$ e $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$, respectivamente. Pelo Teorema de Cauchy, o integral das três últimas parcelas é zero porque essas parcelas são funções inteiras. Logo, o resultado pretendido é igual ao integral da terceira parcela, que (por cálculo directo, ou pela Fórmula Integral de Cauchy) vale $-2\pi i$.

3.



Os planos z e $z + 1$.



Os planos $\frac{1}{z+1}$ e $\frac{1}{z+1}$.

Resposta: $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}, |z + \frac{i}{4}| > \frac{1}{4},\ \text{e}\ \Im z < 0\right\}$.

4.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g(z) + (z-a)g'(z)}{(z-a)g(z)} = \frac{1}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Sendo g inteira, g' é inteira e, como por hipótese g nunca se anula, g'/g é inteira. Assim, $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i\, n(\gamma, a)$, porque pelo Teorema de Cauchy $\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = 0$.

Análise Matemática IV

4 de Janeiro de 2007

LEBM, LEC, LEFT, LEGM e LMAC

2º Teste	–	Perguntas 1, 2 e 3g)	– 90 minutos
1º Exame	–	Todas as perguntas	– 3 horas

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial ordinária de 1ª ordem $2t + y - yy' = 0$.

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (2)

b) Verifique que $y - 2t$ é factor integrante. Resolva a equação diferencial. De preferência, apresente o resultado numa forma factorizada de modo a que fiquem claras duas soluções particulares. (1.5)

Considere agora a equação diferencial ordinária de 2ª ordem $x'' - x' - 2x = 0$.

c) Escreva a equação na forma de um sistema de primeira ordem, $\dot{X} = AX$, com $X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$. (0.5)

d) Calcule e^{At} e a solução do sistema $\dot{X} = AX$ tal que $X(0) = [x_0\ \dot{x}_0]^T$. Caso não tenha resolvido a alínea **c)** tome $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. (2)

e) Se $x'(t) \neq 0$, então a função $t \mapsto x(t)$ admite inversa local $x \mapsto t(x)$. Mostre que $\frac{d}{dx}[x'(t(x))] = \frac{2x+x'}{x'}$. Portanto, as trajectórias do retrato de fase do sistema correspondem aos gráficos das soluções da equação diferencial ordinária da alínea **a)**. Indique os sentidos em que essas trajectórias são percorridas. (0.5)

2. Sejam $a, b > 0$, e $f \in C^2[0,a]$ tal que $f(0) = f(a) = 0$. Considere o problema (P),

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 & \text{se } (x,y) \in]0,a[\times]0,b[, \\ u(0,y) = u(a,y) = 0 & \text{se } y \in [0,b], \\ u_y(x,0) = 0 & \text{se } x \in [0,a], \\ u_y(x,b) = f(x) & \text{se } x \in [0,a]. \end{cases}$$

a) Determine a solução de (P). (2)

b) Particularize a resposta à alínea anterior para $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$. (0.5)

3. Considere a função logaritmo principal, $z \mapsto f(z) = \log z$.

a) Analise a diferenciabilidade de $w \mapsto g(w) = \log\left(\frac{w}{w+1}\right)$: Fazendo $z = \frac{w}{w+1}$, escreva w em termos de z e determine geometricamente a imagem no plano w do conjunto onde o logaritmo principal não é diferenciável. (1.5)

b) Calcule $\int_{|z|=2} \log z \, dz = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\substack{|z|=2 \\ |\arg z| < \pi - \epsilon}} \log z \, dz$ usando o Teorema Fundamental do Cálculo. (2)

c) Calcule $\int_{|w|=2} \log\left(\frac{w}{w+1}\right) dw$ usando integração por partes. (2)

d) Calcule a imagem da circunferência centrada na origem de raio 2, descrita no sentido directo, por $w \mapsto \frac{w}{w+1}$. (1.5)

e) Calcule $\int_{|w|=2} \log\left(\frac{w}{w+1}\right) dw$ usando a substituição $z = \frac{w}{w+1}$ e a Fórmula Integral de Cauchy, confirmando o resultado da alínea **c)**. (2)

f) Quais os possíveis valores de $\int_\gamma \log\left(\frac{w}{w+1}\right) dw$ ao longo de curvas simples fechadas γ contidas na região de holomorfia da função integranda? (1)

g) Calcule o desenvolvimento em série de Laurent de $z \mapsto \frac{\log z}{(z-1)^2}$ em torno de $z = 1$. Classifique esta singularidade e calcule o resíduo respectivo. (1)

Análise Matemática IV

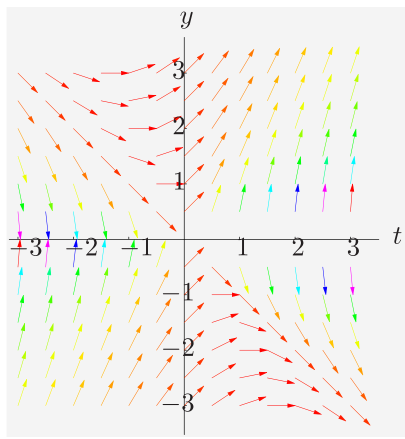
1º Exame - 4 de Janeiro de 2007

LEBM, LEC, LEFT, LEGM e LMAC

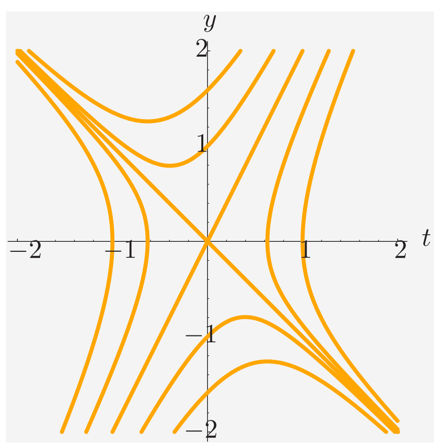
Resolução

1.

a) $y' = \frac{2t+y}{y} = \frac{2+m}{m}$, com $m = \frac{y}{t}$. Note-se que $m = 0 \Rightarrow y' = \infty$, $m = \infty \Rightarrow y' = 1$, $m = -2 \Rightarrow y' = 0$, $m = 1 \Rightarrow y' = 3$, e $y' = \frac{2+m}{m} = m \Rightarrow (m = -1$ ou $m = 2)$.



Campo de direcções de $y' = 1 + 2t/y$.



Esboço dos gráficos das soluções de $y' = 1 + 2t/y$.

b) Multiplicando ambos os membros da equação diferencial por $y - 2t$ obtém-se

$$M + Ny' = (y^2 - 4t^2) + (2ty - y^2)y' = 0.$$

Esta equação é exacta porque $M_y = N_t = 2y$. Como $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo, (M, N) é gradiante, ou seja, existe ϕ tal que $\nabla\phi = (\phi_t, \phi_y) = (M, N)$. Obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_t = y^2 - 4t^2 \\ \phi_y = 2ty - y^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi = -\frac{4}{3}t^3 + ty^2 + c_1(y) \\ \phi = ty^2 - \frac{1}{3}y^3 + c_2(t) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \phi = -\frac{4}{3}t^3 + ty^2 - \frac{1}{3}y^3 + k_1.$$

A equação diferencial pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt}\phi(t, y(t)) = \phi_t + \phi_y y' = 0 \Leftrightarrow \phi(t, y(t)) = k_2$$

$$\Leftrightarrow -4t^3 + 3ty^2 - y^3 = -c.$$

Esta equação tem as soluções $y = -t$ e $y = 2t$ quando $c = 0$. Factorizando,

$$(t + y)(2t - y)^2 = c.$$

c)

$$\dot{X} = \left[\begin{array}{c} x' \\ x'' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0x + 1x' \\ 2x + 1x' \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right] X.$$

d) O polinómio característico de A é $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$. O vector $[1\ \ -1]^T$ é próprio associado ao valor próprio -1, e o vector $[1\ 2]^T$ é próprio associado ao valor próprio 2. Logo,

$$A = S\Lambda S^{-1},$$

com

$$S = \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{array} \right]; \quad S^{-1} = \frac{1}{3} \left[\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right].$$

Portanto,

$$e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1} = \frac{1}{3} \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{rr} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{array} \right] \left[\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\begin{array}{cc} 2e^{-t} + e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{2t} & e^{-t} + 2e^{2t} \end{array} \right].$$

Esta matriz e^{At} é uma matriz Wronskiana. A solução do sistema com condição inicial $X(0) = [x_0\ \dot{x}_0]^T$ é

$$X(t) = e^{At}X(0) = \frac{1}{3} \left[\begin{array}{c} x_0(2e^{-t} + e^{2t}) + \dot{x}_0(-e^{-t} + e^{2t}) \\ x_0(-2e^{-t} + 2e^{2t}) + \dot{x}_0(e^{-t} + 2e^{2t}) \end{array} \right].$$

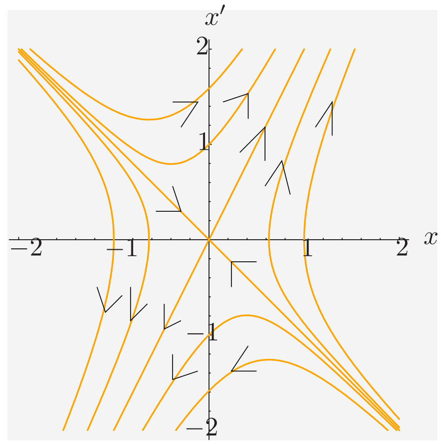
e) Pela derivada da função composta,

$$\frac{d}{dx}[x'(t(x))] = \frac{d}{dt}x'(t) \times \frac{dt}{dx} = \frac{x''}{x'} = \frac{2x + x'}{x'}.$$

Esta é a equação diferencial da alínea **a)**,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t + y}{y},$$

com x' no lugar de y, e x no lugar de t.
Se x' é positivo, então x é crescente; se x' é negativo, então x é decrescente:



Retrato de fase do sistema.

2.

a) Vamos usar separação de variáveis e procurar soluções da forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo na equação diferencial,

$$X''Y + XY'' = 0, \text{ ou } \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda, \text{ ou } \begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ Y'' - \lambda Y = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, de $u(0, y) = u(a, y) = 0$ tira-se que $X(0) = X(a) = 0$. Sabemos das aulas que

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X, \\ X(0) = X(a) = 0, \\ X \not\equiv 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \\ X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \\ c_n \neq 0, \\ n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Facilmente se conclui que a equação $Y_n'' - \lambda_n Y_n = 0$ conduz a

$$Y_n(y) = \alpha_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \beta_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right).$$

Agora de $u_y(x,0) = 0$ tira-se $Y_n'(0) = 0$, o que implica $\beta_n = 0$. Assim,

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right), n = 1,2,3,\ldots.$$

Somando estas soluções obtemos uma solução formal da equação de Laplace com as condições fronteira especificadas na base do rectângulo $[0,a]\times[0,b]$, assim como nos lados esquerdo e direito:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right). \qquad (*)$$

Finalmente, de $u_y(x,b) = f(x)$ conclui-se que devemos ter

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{n\pi}{a}\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = f(x). \qquad (**)$$

Estendendo f como função ímpar ao intervalo $[-a,a]$ e expandindo a extensão de f em série de Fourier, obtém-se

$$a_n \frac{n\pi}{a}\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx,$$

ou seja,

$$a_n = \frac{2}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\,dx, \qquad (***)$$

para $n = 1,2,3,\ldots$. A solução de (P) é dada por $(*)$ com os coeficientes a_n definidos por $(***)$

b) De $(**)$ com $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$, tira-se que

$$a_2\frac{2\pi}{a}\sinh\left(\frac{2\pi b}{a}\right) = 1$$

e que os restantes a_n's são zero. Assim,

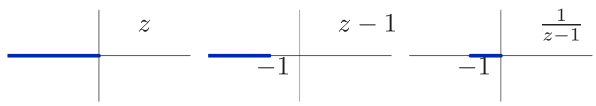
$$u(x,y) = \frac{a}{2\pi\sinh\left(\frac{2\pi b}{a}\right)}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right).$$

3.

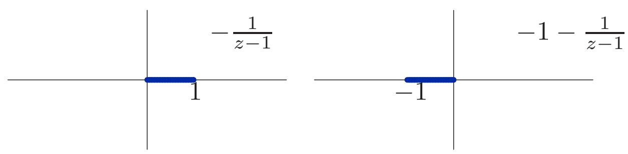
a) Sabemos que a função f não está definida em 0 e não é diferenciável em $S :=]-\infty, 0[$. Como

$$z = \frac{w}{w+1} \Leftrightarrow w = -\frac{z}{z-1} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

a função g não está definida em 0 e não é diferenciável na imagem de S por $z \mapsto -1 - \frac{1}{z-1}$.



Os planos z, $z-1$ e $\frac{1}{z-1}$.



Os planos $-\frac{1}{z-1}$ e $-\frac{z}{z-1}$.

Conclusão: a função g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus [-1, 0]$.

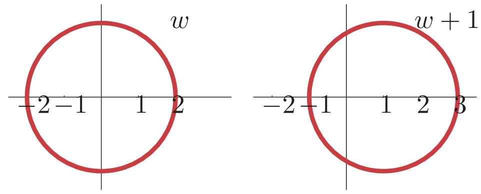
b)

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \log z \, dz &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\substack{|z|=2 \\ |\arg z| < \pi - \epsilon}} \log z \, dz \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} (z \log z - z)\Big|_{2e^{-i(\pi-\epsilon)}}^{2e^{i(\pi-\epsilon)}} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0^+} [2e^{i(\pi-\epsilon)}(\log 2 + i(\pi - \epsilon) - 1) \\
&\qquad -2e^{-i(\pi-\epsilon)}(\log 2 - i(\pi-\epsilon) - 1)] \\
&= -2(\log 2 + i\pi - 1) + 2(\log 2 - i\pi - 1) \\
&= -4\pi i.
\end{aligned}$$

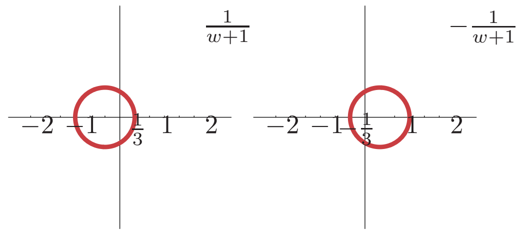
c) Como $\frac{d}{dw}\frac{w}{w+1} = \frac{d}{dw}\left(1 - \frac{1}{w+1}\right) = \frac{1}{(w+1)^2}$,

$$\begin{aligned}
\int_{|w|=2} \log\left(\tfrac{w}{w+1}\right) dw &= w \log\left(\tfrac{w}{w+1}\right)\Big|_{-2}^{-2} - \int_{|w|=2} w \tfrac{w+1}{w} \tfrac{1}{(w+1)^2} \, dw \\
&= -\int_{|w|=2} \tfrac{1}{w+1} \, dw \\
&= -2\pi i.
\end{aligned}$$

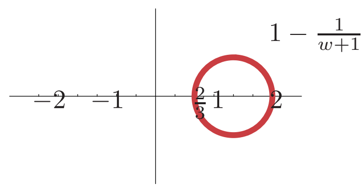
d) Tem-se $\frac{w}{w+1} = 1 - \frac{1}{w+1}$.



Os planos w, $w+1$.



Os planos $\frac{1}{w+1}$ e $-\frac{1}{w+1}$.
As duas circunferências são descritas no sentido inverso.



O plano $\frac{w}{w+1}$. A circunferência é descrita no sentido inverso.

e) $\int_{|w|=2} \log\left(\frac{w}{w+1}\right) dw = -\int_{|z-4/3|=2/3} \log z \frac{1}{(z-1)^2}\, dz = -2\pi i \frac{d}{dz} \log z\Big|_{z=1} = -2\pi i \frac{1}{z}\Big|_{z=1} = -2\pi i$. A primeira igualdade resulta de $\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz}\left(-1 - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{(z-1)^2}$ e da circunferência $|z-4/3| = 2/3$ ser descrita no sentido inverso. A segunda igualdade resulta da Fórmula Integral de Cauchy.

f) A função $w \mapsto \log\left(\frac{w}{w+1}\right)$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus[-1,0]$, pelo que o Teorema de Cauchy implica que $\int_\gamma \log\left(\frac{w}{w+1}\right) dw = \pm 2\pi i$ se γ é homotópica em $\mathbb{C}\setminus[-1,0]$ à circunferência centrada na origem de raio 2 descrita no sentido inverso (directo), e é igual a 0 se γ é homotópica a um ponto.

g) Para $|z-1| < 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\log z &= \frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = 1 - (z+1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \ldots, \\
\log z &= (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \ldots, \\
\frac{\log z}{(z-1)^2} &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} + \frac{z-1}{3} - \frac{(z-1)^2}{4} + \ldots.
\end{aligned}$$

O desenvolvimento em série de Laurent permite concluir que o ponto 1 é um pólo de primeira ordem com resíduo igual a 1.

Análise Matemática IV

2º Exame - 19 de Janeiro de 2007

LEBM, LEC, LEFT, LEGM e LMAC

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por (1)

$$f(x+iy) = x + i(y + x^2)$$

e calcule a sua derivada quando existir.

2. Seja $f : \mathbb{C} :\to \mathbb{C}$, (2)

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

uma função inteira e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o campo vectorial associado a f:

$$F(x,y) = (u(x,y), v(x,y)).$$

Relacione o Jacobiano de F com a derivada de f. Seja $S \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto onde F é injectiva. Escreva $\iint_{F(S)} du\,dv$ nas variáveis x e y.

3. Seja f inteira, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

a) Calcule o desenvolvimento em série de Laurent de $z \mapsto g(z) := \frac{f(z)}{(z-a)^n}$ em torno de a. (1)

b) Sem usar a fórmula integral de Cauchy, a partir do resultado da alínea anterior calcule $\int_{|z-a|=r} g(z)\,dz$. Justifique. (2)

4. Seja $a > 0$. Calcule justificando e usando integrais de contorno (2.5)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$$

5. Considere a equação diferencial linear ordinária de 1ª ordem

$$y' - \frac{y}{x} = 1.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (1)

b) Em que regiões do plano são (de)crescentes as soluções? Onde ocorrem os mínimos e os máximos? (1)

c) Determine analiticamente a solução que satisfaz $y(x_0) = y_0$, onde $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (1)

d) Calcule $\lim_{x\to 0} y(x)$ e $\lim_{x\to 0} y'(x)$. (1)

6. Considere o sistema

$$X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule e^{At} e a solução do sistema. (2)

b) Se $x'(t) \neq 0$, então a função $t \mapsto x(t)$ admite inversa local $x \mapsto t(x)$. Mostre que $\frac{d}{dx}[y(t(x))] = 1 + \frac{y}{x}$. Trace o retrato de fase do sistema. Justifique. (1)

7. Determine a solução geral de (2)

$$y'' - y = -4e^{-t}.$$

8. Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Calcule a série de Fourier de f. Indique os cinco primeiros termos não nulos da série apresentando o resultado de forma simplificada. (2)

b) Calcule (0.5)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots.$$

Análise Matemática IV

2º Exame - 19 de Janeiro de 2007

LEBM, LEC, LEFT, LEGM e LMAC

Resolução

1. A função f é diferenciável como função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Logo, a função f será diferenciável nos pontos em que satisfizer a equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$. Tem-se $f_x = 1 + 2ix$ e $f_y = i \Rightarrow -if_y = 1$. Conclui-se que f é diferenciável nos pontos $x + iy$ tais que $x = 0$, ou seja no eixo imaginário. A derivada é $f'(iy) = f_x(iy) = 1$.

2. Se f é diferenciável, então satisfaz a equação de Cauchy-Riemann $f_x = -if_y$. Como $f_x = u_x + iv_x$ e $-if_y = -iu_y + v_y$, tira-se $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Além disso, $f' = f_x$. Logo,

$$JF = \det DF = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f_x|^2 = |f'|^2.$$

Sendo S compacto e F contínua, $F(S)$ é compacto e portanto mensurável. Usando a fórmula de mudança de variáveis de integração, $\iint_{F(S)} du\,dv = \iint_S |\det DF|\,dx\,dy = \iint_S |f'|^2\,dx\,dy$.

3.

a) Como f é inteira, para todo o $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k + \ldots.$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por $(z-a)^n$,

$$\begin{aligned} g(z) \quad = \quad & \underbrace{\tfrac{f(a)}{(z-a)^n} + \tfrac{f'(a)}{(z-a)^{n-1}} + \tfrac{f''(a)/2!}{(z-a)^{n-2}} + \ldots + \tfrac{f^{(n-2)}(a)/(n-2)!}{(z-a)^2}}_{g_1(z)} \\ & + \underbrace{\tfrac{f^{(n-1)}(a)/(n-1)!}{(z-a)}}_{g_2(z)} \\ & + \underbrace{\tfrac{f^{(n)}(a)}{n!} + \tfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \tfrac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(z-a)^2 + \ldots}_{g_3(z)}, \end{aligned}$$

para todo o $z \neq a$.

b) Seja

$$G_1(z) = -\tfrac{f(a)/(n-1)}{(z-a)^{n-1}} - \tfrac{f'(a)/(n-2)}{(z-a)^{n-2}} - \tfrac{f''(a)/((n-3)2!)}{(z-a)^{n-3}} - \ldots - \tfrac{f^{(n-2)}(a)/(n-2)!}{(z-a)}.$$

Então $G_1'(z) = g_1(z)$, pelo que g_1 é a derivada de uma função holomorfa e $\int_{|z-a|=r} g_1(z)\,dz = 0$. Como g_3 é inteira, pelo Teorema de Cauchy, também $\int_{|z-a|=r} g_3(z)\,dz = 0$. Finalmente, por cálculo directo, $\int_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i$. Combinando estes resultados,

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,dz = \int_{|z-a|=r} [g_1(z) + g_2(z) + g_3(z)]\,dz = 2\pi i \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}.$$

4.

Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-ia, ia\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} = \frac{z^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}$. Tem-se,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-ia)^2}, \text{ com } g(z) = \frac{z^2}{(z+ia)^2}.$$

A função g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-ia\}$. Seja $R > a$ e $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \wedge |z| \leq R\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0 \wedge |z| = R\}$. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-ia)^2}\,dz = 2\pi i g'(ia) = 2\pi i \left[\frac{2iaz(z+ia)}{(z+ia)^4}\right]_{z=ia} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{2^2 i^3 a^3}{2^4 a^4} = \frac{\pi}{2a}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\pi}{2a} = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{|z|=R \wedge \Im z > 0} f(z)\,dz. \quad (*)$$

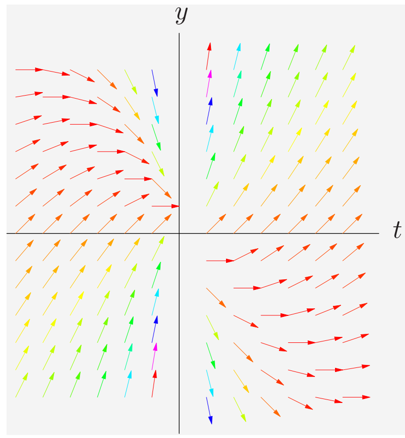
O cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando $R \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \left|\int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\,dz\right| &\leq \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} \frac{R^2}{(R^2-a^2)^2}|dz| \\ &= \frac{\pi R^3}{(R^2-a^2)^2} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty. \end{aligned}$$

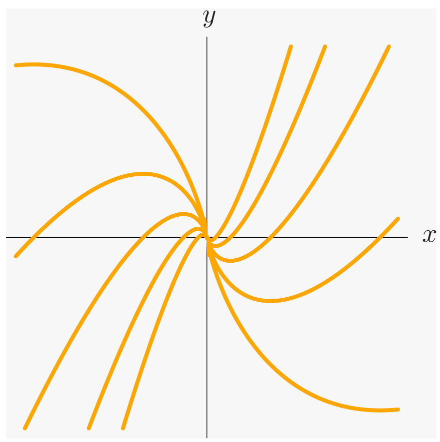
Tomando o limite em ambos os membros de $(*)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$.

5.

a) $y' = 1 + \frac{y}{x} = 1 + m$, com $m = \frac{y}{x}$. Note-se, por exemplo, que $m = 0 \Rightarrow y' = 1$, $m = 1 \Rightarrow y' = 2$, $m = -1 \Rightarrow y' = 0$, $m = \infty \Rightarrow y' = \infty$, e $y' = 1 + m = m \Rightarrow m = \infty$.



Campo de direcções de $y' = 1 + y/x$.



Esboço dos gráficos das soluções de $y' = 1 + y/x$.

b) As soluções são decrescentes quando

$$y' < 0 \Leftrightarrow m < -1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} < -1 \Leftrightarrow (y < -x \wedge x > 0 \text{ ou } y > -x \wedge x < 0),$$

e são crescentes quando

$$y' > 0 \Leftrightarrow m > -1 \Leftrightarrow \frac{y}{x} > -1 \Leftrightarrow (y > -x \wedge x > 0 \text{ ou } y < -x \wedge x < 0).$$

Têm pontos de estacionaridade em

$$y' = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Leftrightarrow y = -x,$$

sendo que os máximos ocorrem em $y = -x$ e $x < 0$, e os mínimos em $y = -x$ e $x > 0$.

c) Um factor integrante é $e^{\int(-1/x)\,dx} = e^{-\log|x|} = \frac{1}{|x|}$, pelo que $1/x$ é também factor integrante. Multiplicando a ambos os membros da equação por este factor integrante obtém-se

$$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Integrando de x_0 a x, vem

$$\frac{y(x)}{x} - \frac{y(x_0)}{x_0} = \log|x| - \log|x_0| \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = y_0\frac{x}{x_0} + x\log\left|\frac{x}{x_0}\right|.$$

uma vez que $y(x_0) = y_0$. Na realidade podemos escrever $y(x) = y_0\frac{x}{x_0} + x\log\left(\frac{x}{x_0}\right)$ porque as soluções com $x_0 > 0$ estão definidas para $x > 0$, e as soluções com $x_0 < 0$ estão definidas para $x < 0$.

d)

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(x/x_0)}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{x_0/x \times 1/x_0}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0} x = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0} y'(x) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{y_0}{x_0} + \log\left(\frac{x}{x_0}\right) + 1\right] = -\infty.$$

6.

a) A matriz $A^T = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, J em forma canónica de Jordan. Usando a definição de exponencial,

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \ldots = I + J^Tt + \frac{1}{2!}(J^T)^2t^2 + \ldots \\ &= I + J^Tt + \frac{1}{2!}(J^2)^Tt^2 + \ldots = \left(I + Jt + \frac{1}{2!}J^2t^2 + \ldots\right)^T \\ &= \left(e^{Jt}\right)^T = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} e^t. \end{aligned}$$

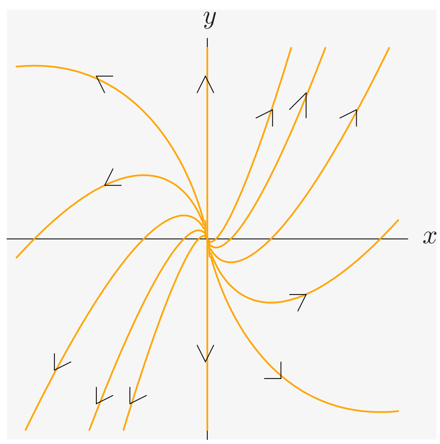
A solução do sistema é

$$X(t) = e^{At}X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0t + y_0 \end{bmatrix} e^t.$$

b) Pela derivada da função composta,

$$\frac{d}{dx}[y(t(x))] = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Portanto os gráficos das soluções da equação diferencial correspondem a trajectórias do retrato de fase do sistema. Há no entanto que juntar as trajectórias $X(t) = [0 \ y_0]^T e^t$, correspondentes justamente ao fluxo ao longo da única direcção própria, que não correspondem a gráficos de funções de x. Para determinar o sentido em que as trajectórias são descritas podemos observar que na direcção do vector próprio, $[0 \ 1]^T$, o fluxo afasta-se da origem já que o valor próprio associado é 1. Ao longo das outras trajectórias os sentidos podem ser determinados por continuidade. *Em alternativa,* se x é positivo, então x' é positivo, pelo que x é crescente; se x é negativo, então x' é negativo, pelo que x é decrescente.



O retrato de fase do sistema.

7. Designando por D o operador de derivação,

$$\begin{aligned} y'' - y = -4e^{-t} \quad &\Leftrightarrow \quad (D^2-1)y = -4e^{-t} \ \Leftrightarrow \ (D-1)(D+1)y = -4e^{-t} \\ &\Rightarrow \quad (D-1)(D+1)^2 y = 0 \ \Leftrightarrow \ y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação original obtém-se,

$$(c_3 t e^{-t})'' - c_3 t e^{-t} = -4e^{-t} \ \Leftrightarrow \ -2c_3 e^{-t} = -4e^{-t} \ \Leftrightarrow \ c_3 = 2.$$

A solução geral da equação dada é

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 2te^{-t}.$$

8.

a) Como f é seccionalmente C^1, para todos os pontos de continuidade, ou seja $x \notin \{-\pi/3, \pi/3\}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

com

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Como f é par todos os b_n's são nulos e

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \cos(nx)\, dx = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{se } n = 0, \\ \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) & \text{se } n \neq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n = 3k+3, \\ +\frac{\sqrt{3}}{n\pi} & \text{se } n = 6k+1 \text{ ou } n = 6k+2, \\ -\frac{\sqrt{3}}{n\pi} & \text{se } n = 6k+4 \text{ ou } n = 6k+5, \end{cases} \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{N}_0$. Assim,

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}\cos(4x) - \frac{1}{5}\cos(5x) + \dots \right]. \quad (*)$$

b) O ponto π é um ponto de continuidade (da extensão periódica) de f, pelo que podemos tomar $x = \pi$ na igualdade $(*)$. Obtém-se

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Nota: Para calcular a soma no enunciado também se podia escolher o ponto $x = \pi/3$, caso em que a soma da série de Fourier vale $1/2$ (média dos limites laterais de f nesse ponto).