Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 21 de Dezembro de 2013

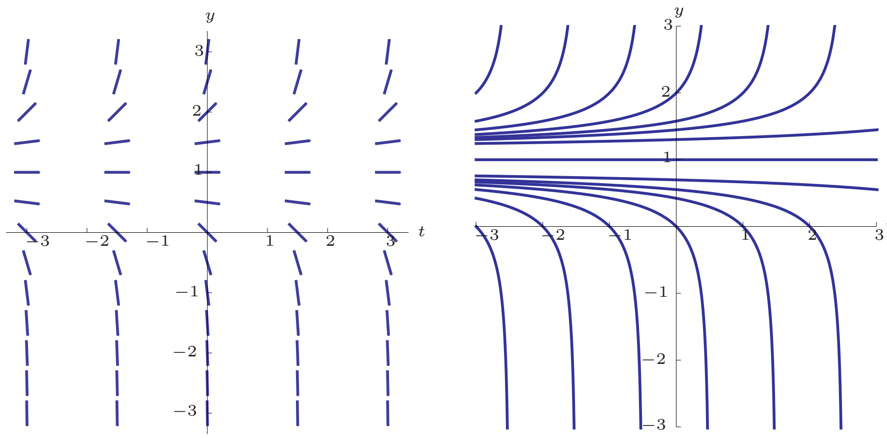
LEGM e MEC

Resolução

versão **B**

1.

a)



b) Vem

$$\frac{y'}{(y-1)^3} = 1,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{(y-1)^2} = -2,$$

$$\frac{1}{(y-1)^2} - 1 = -2(t-t_0),$$

$$y = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-2(t-t_0)}}.$$

Uma vez que $y(t_0) = 0$,

$$y = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-2(t-t_0)}}.$$

O domínio das solução é $\left]-\infty, t_0 + \frac{1}{2}\right[$.

2. Um factor integrante é $e^{-\int \frac{1}{t}\,dt} = \frac{1}{|t|}$. Podemos usar $\frac{1}{t}$ como factor integrante. Multiplicando ambos os membros das equação diferencial por $\frac{1}{t}$, obtém-se

$$\frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 1.$$

Reconhecemos no primeiro membro a derivada do factor integrante vezes y:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{t}y\Big) = 1.$$

Integrando ambos os membros de 1 a t e usando a condição inicial $y(1) = 2$, vem

$$\frac{1}{t}y - 2 = t - 1 \;\Leftrightarrow\; y = t^2 + t.$$

3. O operador $D + 2$ aniquila $t \mapsto 8e^{-2t}$. Se y é uma solução da equação diferencial, então

$$(D+2)(D^2+4)y = 0,$$

isto é,

$$y = ce^{-2t} + d\cos(2t) + e\sin(2t).$$

Substituindo esta expressão para y na equação original, obtém-se

$$\begin{aligned}(D^2+4)(ce^{-2t} + d\cos(2t) + e\sin(2t)) &= 8e^{-2t}\\ \Leftrightarrow\; (D^2+4)(ce^{-2t}) &= 8e^{-2t}.\end{aligned}$$

Logo, $c = 1$. A solução geral da equação do enunciado é

$$y(t) = e^{-2t} + d\cos(2t) + e\sin(2t).$$

4.

a) O polinómio característico da matriz do sistema é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

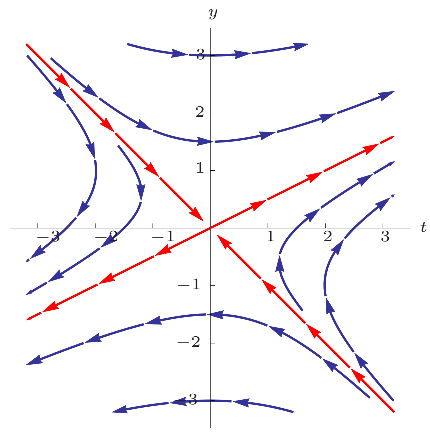
A solução geral do sistema é

$$X(t) = c_1e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema que satisfaz a condição inicial é

$$X(t) = \frac{x_0 - 2y_0}{3}e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 + y_0}{3}e^{2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b)



5. Para cada t, prolonga-se u como função ímpar em x e periódica em x, de período 2π. Em particular, u_0 também fica ímpar. Então, para cada t fixo, desenvolvendo $x \mapsto u(x,t)$ em série de Fourier,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(nx).$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, vem

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t)\sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n(t)\sin(nx) + 8e^{-2t}\sin(2x).$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$\begin{cases} b_2''(t) = -4b_2(t) + 8e^{-2t}, & \\ b_n''(t) = -n^2 b_n(t) & \text{para } n \neq 2. \end{cases}$$

Usando o resultado da Pergunta **3.**, a expressão para os b_n's é

$$\begin{cases} b_2(t) = e^{-2t} + c_2\cos(2t) + \frac{d_2}{2}\sin(2t), & \\ b_n(t) = c_n\cos(nt) + \frac{d_n}{n}\sin(nt) & \text{para } n \neq 2. \end{cases}$$

Portanto, obtém-se

$$u(x,t) \;=\; e^{-2t}\sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n\cos(nt) + \tfrac{d_n}{n}\sin(nt)\right]\sin(nx).$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Resta garantir as condições iniciais. Uma vez que

$$u(x,0) = \sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx),$$

deve escolher-se $c_3 = -1$ e os outros c_n nulos. E uma vez que

$$u_t(x,0) = -2\sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(nx),$$

devem escolher-se os d_n nulos. A solução fica

$$u(x,t) = e^{-2t}\sin(2x) - \cos(3t)\sin(3x).$$

6. A projecção de f no subespaço de $L^2[-\pi,\pi]$ gerado por $x \mapsto \cos x$ é

$$a_1 \cos x$$

com

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\,dx \\ &= \frac{2}{\pi} x\sin x\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = -\frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Logo, a projecção de f no subespaço de $L^2[-\pi,\pi]$ gerado por $x \mapsto \cos x$ é

$$-\frac{4}{\pi}\cos x.$$

A componente de f ortogonal ao subespaço de $L^2[-\pi,\pi]$ gerado por $x \mapsto \cos x$ é igual a

$$f(x) - \Big(-\frac{4}{\pi}\cos x\Big) = |x| + \frac{4}{\pi}\cos x.$$