Análise Complexa e Equações Diferenciais

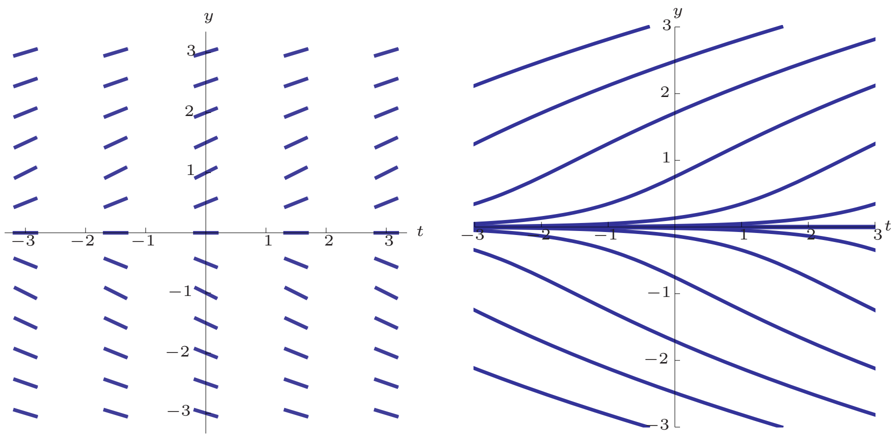
2º Teste - 22 de Dezembro de 2012

LMAC, MEBiom e MEFT

Resolução

1.

a)



b) Sim, o Teorema de Picard-Lindelöf garante unicidade de solução de um problema de valor inicial para esta equação porque a função $y \mapsto \frac{y}{y^2+1}$ é de classe C^1.

c) A equação admite a solução identicamente nula e admite as soluções

$$\frac{y^2}{2} + \ln|y| = t + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

d)

$$y'' = \frac{d}{dy}\left(\frac{y}{y^2+1}\right)\frac{dy}{dt} = \frac{y(1-y^2)}{(y^2+1)^3}.$$

2. Um factor integrante é $\frac{1}{1+t^2}$. A equação diferencial pode escrever-se na forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{1+t^2}\right) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

A solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = (y_0 - \arctan t)(1+t^2).$$

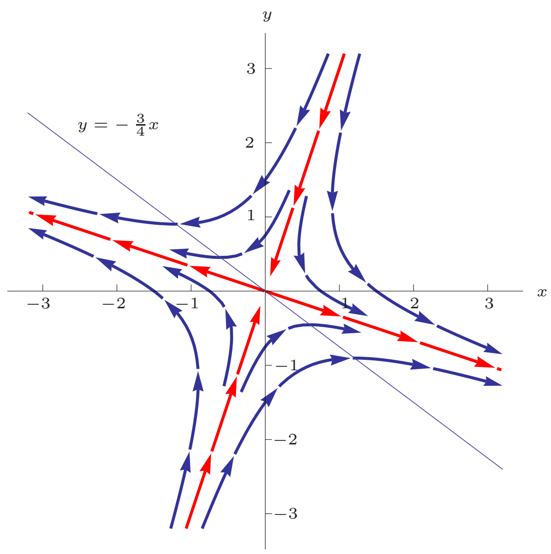
Tem-se $y(t) \geq 0$ para todo o t sse $y_0 \geq \frac{\pi}{2}$.

3.

a) O sistema admite o vector próprio $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ associado ao valor próprio -5 e admite o vector próprio $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ associado ao valor próprio 5. A solução que no instante $t = 0$ vale $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ é

$$X(t) = \tfrac{x_0+3y_0}{10} e^{-5t} v_1 + \tfrac{3x_0-y_0}{10} e^{5t} v_2.$$

b) As trajectórias são horizontais sobre a recta $y = -\frac{3}{4}x$. A função $X(t) \equiv 0$ é obviamente uma solução. Neste caso não faz sentido falar no espaço tangente à trajectória porque a trajectória não é uma curva, é um ponto.



4.

a) Prolonga-se u como função ímpar em x e periódica, de período 2π. Para cada t fixo, o desenvolvimento de $u(\cdot, t)$ em série de Fourier é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [b_n(t) \sin(nx)].$$

Com a função u desta forma, as condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo a série para u na equação diferencial obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} [b_n''(t) \sin(nx)] = -\sum_{n=1}^{\infty} [n^2 b_n(t) \sin(nx)] + 5e^{-t} \sin(2x).$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier, vem

$$\begin{aligned} b_n''(t) &= -n^2 b_n(t), \quad \text{para } n \neq 2, \\ b_2''(t) &= -4b_2(t) + 5e^{-t}. \end{aligned}$$

Isto conduz a

$$\begin{aligned} b_n(t) &= c_n \cos(nt) + \tfrac{d_n}{n} \sin(nt), \quad \text{para } n \neq 2, \\ b_2(t) &= c_2 \cos(2t) + \tfrac{d_2}{2} \sin(2t) + e^{-t}. \end{aligned}$$

Substituindo na expressão para a função u, obtém-se

$$\begin{aligned} u(x,t) &= [c_1 \cos t + d_1 \sin t] \sin x + \\ &\quad \left[c_2 \cos(2t) + \tfrac{d_2}{2} \sin(2t) + e^{-t}\right] \sin(2x) \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} [c_n \cos(nt) + \tfrac{d_n}{n} \sin(nt)] \sin(nx). \end{aligned}$$

Usando a condição inicial

$$0 = u_t(x,0) = d_1 \sin x + (d_2 - 1) \sin(2x) + \sum_{n=3}^{\infty} d_n \sin(nx),$$

vem

$$u(x,t) = \left[\tfrac{1}{2} \sin(2t) + e^{-t}\right] \sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos(nt) \sin(nx)].$$

b) Usando a expressão obtida para u na alínea anterior, obtém-se

$$u(x,0) = \sin(2x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx).$$

Para que o segundo membro coincida com $\sin(2x)+u_0(x)$, os coeficientes c_n devem ser dados por

$$c_n = \tfrac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(nx)\, dx.$$

c) As condições de compatibilidade para a função u_0 são

$$u_0(0) = u_0(\pi) = u_0''(0) = u_0''(\pi) = 0.$$

5.

a) A função $v : [0, l] \times [0, +\infty[$ definida por

$$v(x, t) = u(x, t) - u(l - x, t)$$

é uma solução do problema com condição inicial nula. Logo, v é identicamente nula, ou seja, $u(x, t) = u(l-x, t)$. Portanto, $u(\,\cdot\,, t)$ é par em torno de $l/2$ para todo o $t > 0$.

b) Se $u(\,\cdot\,, t)$ é par para todo o $t \in \mathbb{R}$, então $u(\,\cdot\,, 0)$ é par, ou seja, u_0 é par. Se $u(x, \,\cdot\,)$ é par para todo o $x \in [-l, l]$, então $u(x, t) = u(x, -t)$. Derivando ambos os membros desta igualdade em ordem a t, obtém-se $u_t(x, t) = -u_t(x, -t)$. Em particular, $u_t(x, 0) = -u_t(x, 0)$. Logo, v_0 é identicamente nula.

Inversamente, suponha-se que u_0 é par e $v_0 = 0$. A função $v : [-l, l] \times \mathbb{R}$ definida por

$$v(x, t) = u(x, t) - u(-x, t)$$

é uma solução do problema com condições iniciais

$$v(x, 0) = u_0(x) - u_0(-x) = 0,$$

$$v_t(x, 0) = u_t(x, 0) - u_t(-x, 0) = v_0(x) - v_0(-x) = 0 - 0 = 0.$$

Logo, v é identicamente nula, ou seja, $u(x, t) = u(-x, t)$. Portanto, $u(\,\cdot\,, t)$ é par. Também a função $w : [-l, l] \times \mathbb{R}$ definida por

$$w(x, t) = u(x, t) - u(x, -t)$$

é uma solução do problema com condições iniciais

$$w(x, 0) = u_0(x) - u_0(x) = 0,$$

$$w_t(x, 0) = u_t(x, 0) + u_t(x, 0) = v_0(x) + v_0(x) = 0 + 0 = 0.$$

Logo, w é identicamente nula, ou seja, $u(x, t) = u(x, -t)$. Portanto, $u(x, \,\cdot\,)$ é par.