Análise Complexa e Equações Diferenciais

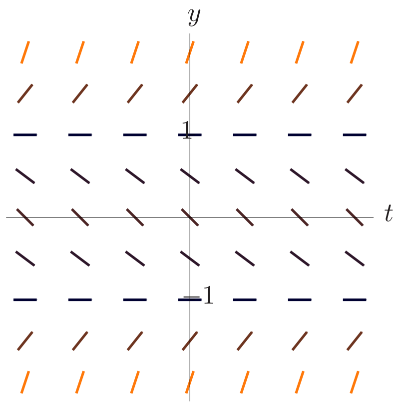
2º Teste - 18 de Dezembro de 2010

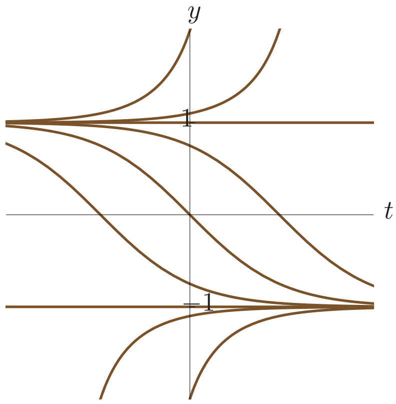
LMAC, MEBiom e MEFT

Resolução

1.

a)





b) A equação $y' = y^2 - 1$ é separável, podendo ser escrita na forma canónica

$$\frac{1}{y^2-1}y' = 1 \quad \text{ou} \quad \Big(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\Big)y' = 2.$$

Pela derivada da função composta,

$$\frac{d}{dt}\ln\Big|\frac{y(t)-1}{y(t)+1}\Big| = 2.$$

Integrando ambos os membros de 0 a t, usando a condição inicial $y(0) = 0$ e o facto de $-1 < y(t) < 1$,

$$\frac{1-y(t)}{1+y(t)} = e^{2t}, \quad \text{ou seja,} \quad y(t) = \frac{1-e^{2t}}{1+e^{2t}}.$$

2. Começamos por escrever a equação

$$\frac{1}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = x \ln x$$

na forma canónica das equações lineares homogéneas,

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \ln x.$$

Um factor integrante é $e^{-\int \frac{2}{x}\,dx} = \frac{1}{x^2}$. Multiplicando ambos os membros por este factor,

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \ln x \quad \text{ou seja,} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) = \ln x.$$

Uma primitiva de $\ln x$ calcula-se por partes,

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int 1\,dx = x \ln x - x.$$

Logo,

$$\frac{y(x)}{x^2} - \frac{y(e)}{e^2} = x \ln x - x - e \ln e + e = x \ln x - x.$$

Finalmente, a condição inicial $y(e) = e^2$ implica

$$y(x) = x^2(x \ln x - x + 1).$$

3.

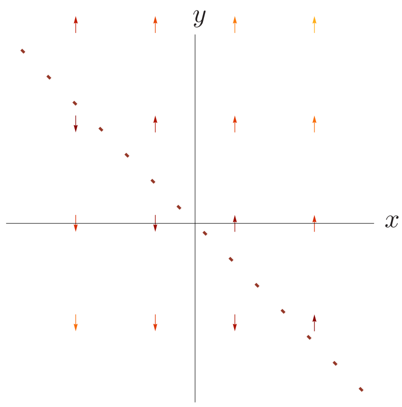
a) O polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$, pelo que os valores próprios são 0 e 1, com vectores próprios associados $v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente. Assim, tem-se $A = S\Lambda S^{-1}$ com

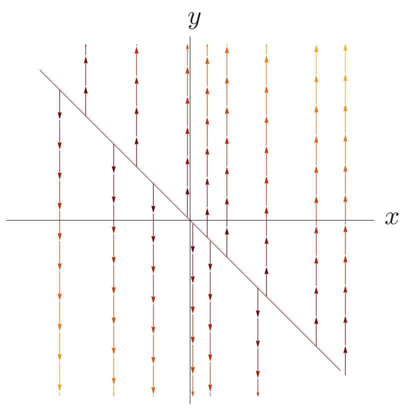
$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A solução do sistema $X' = AX$ que satisfaz $X(0) = X_0$ é

$$\begin{aligned} X(t) &= Se^{\Lambda t}S^{-1}X_0 = [v_0 \ v_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= x_0 v_0 + (x_0 + y_0) e^t v_1 \\ &= x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (x_0 + y_0) e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b)





4. Designando por D o operador de derivação, podemos escrever a equação diferencial na forma $(D^2 + 4)y = e^t$. Como o operador $D - 1$ aniquila e^t,

$$(D^2 + 4)y = e^t \quad \Rightarrow \quad (D - 1)(D^2 + 4)y = 0,$$

o que é equivalente a

$$y = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + c_3 e^t, \ \text{com } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Substituindo na equação original,

$$\begin{aligned} (D^2 + 4)(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + c_3 e^t) = e^t \quad &\Leftrightarrow \quad (D^2 + 4)(c_3 e^t) = e^t \\ &\Leftrightarrow \quad c_3 = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação dada é

$$y = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{1}{5}e^t \text{ com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Estendemos u com função ímpar em x, e periódica em x, de período 2π. Para cada y fixo, desenvolvemos u em série de Fourier,

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y)\sin(nx). \tag{1}$$

Assim, as condições fronteira $u(0,y) = 0$ para $y \in [0,b]$, e $u(\pi,y) = 0$ para $y \in [0,b]$ estão formalmente satisfeitas. Para que u satisfaça a equação diferencial, $-\Delta u = u$, deverá ter-se

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 b_n(y) - b_n''(y))\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y)\sin(nx).$$

Pela unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$n^2 b_n(y) - b_n''(y) = b_n(y) \;\Leftrightarrow\; b_n''(y) = (n^2-1)b_n(y).$$

Obtém-se

$$\begin{array}{rcl} b_1(y) & = & c_1 + d_1 y, \\ b_n(y) & = & c_n\cosh\big(\sqrt{n^2-1}\,y\big) + d_n\sinh\big(\sqrt{n^2-1}\,y\big), \text{ se } n \geq 2. \end{array}$$

Substituindo em (1), somos conduzidos a

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin(nx).$$

Para garantir a condição fronteira $u(x,0) = 0$, devemos escolher todos os c_n's nulos. Logo,

$$u(x,y) = d_1 y\sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty} d_n\sinh\big(\sqrt{n^2-1}\,y\big)\sin(nx). \tag{2}$$

Finalmente, resta garantir a condição fronteira $u(x,b) = f(x)$. Como

$$u(x,b) = d_1 b\sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty} d_n\sinh\big(\sqrt{n^2-1}\,b\big)\sin(nx),$$

deveremos escolher

$$
\begin{aligned}
d_1 b &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx,\\
d_n \sinh\bigl(\sqrt{n^2-1}\,b\bigr) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx
\end{aligned}
$$

para $n \geq 2$. Isto é,

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{2}{\pi b}\int_0^{\pi} f(x)\sin(x)\,dx,\\
d_n &= \frac{2}{\pi\sinh\bigl(\sqrt{n^2-1}\,b\bigr)}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx
\end{aligned}
$$

para $n \geq 2$. Em conclusão, a solução do sistema do enunciado é dada por (2) com estes coeficientes d_n.

6. A função u tem que ser não negativa. Com efeito, suponhamos por contradição que u é negativa nalguma subregião de Ω. Então tem um mínimo absoluto, assumido num ponto, digamos x_0, necessariamente pertencente a Ω. Tem-se por um lado $\Delta u(x_0) = u_{xx}(x_0) + u_{yy}(x_0) \geq 0$ e por outro lado $u(x_0) < 0$. Isto contradiz $\Delta u(x_0) = u(x_0)$ e prova que u é não negativa.