

# Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 17 de Dezembro de 2016

LEMat e MEAer

Duração: 90 minutos

**Apresente os cálculos**



1. Considere a equação diferencial

$$y' = e^{-(t-y)^2/4}.$$

Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (3)

2. Resolva a equação diferencial

$$y' = \frac{y^3}{t-1},$$

com condição inicial  $y(0) = 1$ , obtendo explicitamente  $y$  em função de  $t$ .

3. Determine a solução de

$$y'' - 4y = t^2$$

que satisfaz  $y(0) = y'(0) = 0$ .

4. Considere o sistema

$$X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X.$$

a) Determine a solução que no instante  $t = 0$  vale  $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ . (2)

b) Esboce o retrato de fase do sistema, indicando a direcção assimptótica das trajectórias quando se aproximam da origem. (2)

5. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + (4t+1) \cos(2x) & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty[, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Determine formalmente uma solução.

6. Seja  $X(\cdot)$  uma solução do sistema da pergunta 4.

a) Calcule para que vectores de  $X$ , da forma  $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\frac{d}{dt}\|X\|^2$  tem o seu valor máximo (ou seja, mínimo em módulo). Qual é o valor desse máximo? (1.5)

b) Suponha que  $X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ , com  $y_0 > 0$ . Determine o valor máximo da primeira coordenada de  $X$  em termos de  $y_0$ . (1.5)