Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Teste - 28 de Maio de 2016

LEGM e MEC

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Considere a equação diferencial separável

$$y' = \frac{e^y}{e^y + 1} = 1 - \frac{1}{e^y + 1}.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (2)

b) Determine a solução da equação diferencial, que satisfaz $y(t_0) = y_0$. Deixe o resultado na forma implícita, ou seja, não precisa de determinar y explicitamente. (3)

2. Resolva (2)

$$y' - 2ty = t,$$

com condição inicial $y(0) = \frac{1}{2}$. Simplifique o resultado.

3. Resolva usando o método do aniquilador (2)

$$y'' + 4y = t^2.$$

4. Considere o sistema

$$X' = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} X.$$

a) Determine a solução que satisfaz $X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$. (2)

b) Esboce o retrato de fase do sistema. (2)

5. Considere o problema (4)

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,\infty[, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,\infty[, \\ u(x,0) = 1 + 2\cos(3x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Determine uma solução.

6. Considere a solução y da alínea **1b)**.

a) Determine o comportamento assimptótico do gráfico de y quando t tende para $+\infty$. (2)

b) Caracterize o ponto em que y'' atinge o seu valor máximo. (1)