Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 2 de Novembro de 2013

LEGM e MEC

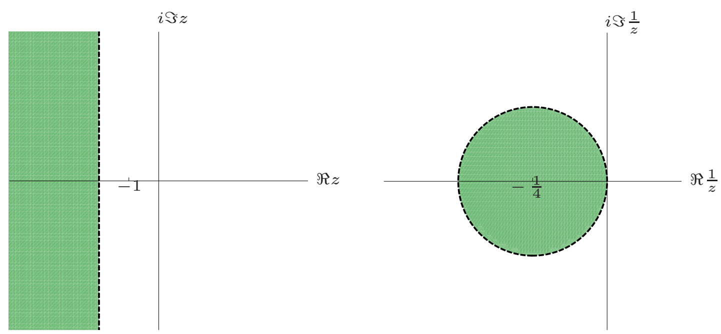
Resolução

1.

a) $-2i$;
b) 5;
c) $-i$;
d) $3e^{i\pi}$, $3e^{i\frac{\pi}{3}}$, $3e^{-i\frac{\pi}{3}}$;
e) $1+i\pi$;
f) 1.

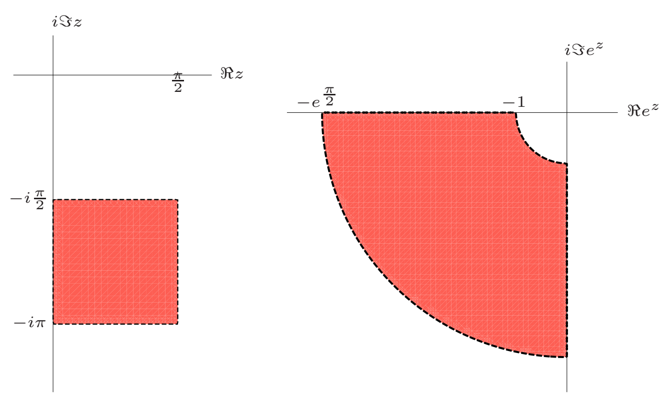
2.

a)



$f(S)=\{z\in\mathbb{C} : |z+\frac{1}{4}|<\frac{1}{4}\}$.

b)



$f(S)=\{z\in\mathbb{C} : 1<|z|<e^{\frac{\pi}{2}}$ e $-\pi<\arg z<-\frac{\pi}{2}\}$.

3.
$$f_x = -\frac{1}{y} + i, \quad f_y = \frac{x}{y^2} + i, \quad -if_y = 1 - i\frac{x}{y^2}.$$
A função é $\mathbb{R}-$diferenciável no seu domínio porque f_x e f_y são contínuas. A equação de Cauchy-Riemann, $f_x = -if_y$, é satisfeita em $-1-i$.
$$f'(-1-i) = f_x(-1-i) = 1+i.$$

4.

a) $\int_L \overline{z}\,dz = \int_0^1 (1-t+it)(-1-i)\,dt = -\frac{1}{2}(1+i)^2 = -i;$

b) $\int_L z^2 \log z\,dz = \left(\frac{z^3}{3}\log z - \frac{z^3}{9}\right)\Big|_1^{-i} = \frac{\pi}{6} + \frac{1-i}{9}.$

5.

a)
$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2(z+2)^2}\,dz &= 2\pi i \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+2)^2}\Big|_{z=0} \\ &= -2\pi i \frac{2}{(z+2)^3}\Big|_{z=0} = -i\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

b) Seja $g(z) = \frac{1}{(z+2)^2}$. Tem-se
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2}g(z) \\ &= \frac{1}{z^2}\left[g(0) + g'(0)z + \frac{g''(0)}{2!}z^2 + \frac{g'''(0)}{3!}z^3 + \dots\right] \\ &= \frac{g(0)}{z^2} + \frac{g'(0)}{z} + \frac{g''(0)}{2!} + \frac{g'''(0)}{3!}z + \dots,\end{aligned}$$
válido para $0 < |z| < 2$. Como $g(0) \neq 0$, f tem um pólo de segunda ordem no ponto 0. O resíduo de f no ponto 0 é $g'(0) = -\frac{1}{4}$.

6. Seja $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$. Tem-se
$$\begin{aligned}\log e^z &= \log(e^x e^{iy}) \\ &= x + i(y - 2k\pi), \text{ onde } k \text{ é o inteiro tal que } y - 2k\pi \in]-\pi, \pi] \\ &= z - 2k\pi i, \text{ onde } k \text{ é o inteiro tal que } \Im z \in](2k-1)\pi, (2k+1)\pi].\end{aligned}$$

Nos pontos z cuja parte imaginária é $(2l+1)\pi$, para algum $l \in \mathbb{Z}$, a função $z \mapsto \log e^z$ é descontínua. Com efeito, seja z_0 com $\Im z_0 = (2l+1)\pi$. Então,
$$\log e^{z_0} = z_0 - 2l\pi i.$$

Para pontos z cuja parte imaginária é ligeiramente superior a $(2l+1)\pi$, $\Im z \in](2(l+1)-1)\pi, (2(l+1)+1)\pi]$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{z\to z_0\\ \Im z > \Im z_0}} \log e^z &= \lim_{\substack{z\to z_0\\ \Im z > \Im z_0}} [z - 2(l+1)\pi i] \\ &= z_0 - 2(l+1)\pi i \neq \log e^{z_0}.\end{aligned}$$

Nos restantes pontos de $\mathbb{C}$ a função é contínua. Com efeito, seja z_0 com $(2l-1)\pi < \Im z_0 < (2l+1)\pi$, para um certo $l \in \mathbb{Z}$. Para z próximo de z_0, tem-se

$$\log e^z = z - 2l\pi i.$$

Assim,

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \log e^z = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} (z - 2l\pi i) = z_0 - 2l\pi i = \log e^{z_0}.$$

Considere-se agora $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $\theta \in]-\pi, \pi]$. Tem-se

$$e^{\log z} = e^{\log(re^{i\theta})} = e^{\ln r + i\theta} = re^{i\theta} = z.$$

A função $z \mapsto e^{\log z}$ é contínua no seu domínio ($\mathbb{C} \setminus \{0\}$) porque é a função identidade.