[versão 2]

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 2 de Novembro de 2019

MEAer, MEAmbi, MEEC, MEQ

Resolução

1.

a) Uma vez que f é de classe C^2 e

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = i(2+2\alpha),$$

f é harmónica sse $\alpha = -1$. Assim, f é harmónica sse $(\alpha, \beta) = (-1, \beta)$.

b) Para que f seja holomorfa tem que ser harmónica. Logo, $\alpha = -1$ e

$$f(x+iy) = (-x - \beta xy) + i(x^2 - y^2 - y).$$

Tem-se

$$\begin{aligned} f_x &= -(1+\beta y) + 2xi, \\ f_y &= -\beta x - i(1+2y), \\ -if_y &= -(1+2y) + \beta xi. \end{aligned}$$

Assim, f é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C}$ porque tem derivadas parciais contínuas. É diferenciável para $\beta = 2$ porque é nesse caso que é satisfeita a equação de Cauchy-Riemann. Resposta: $(\alpha, \beta) = (-1, 2)$. $f' = f_x = -(1+2y) + 2xi = -1 + 2iz$.

c) Usando a fórmula integral de Cauchy, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{[f'(z)]^2}{(z+1)^2}\, dz &= 2\pi i \left([f'(z)]^2\right)'\Big|_{z=-1} = 4\pi i f'(-1) f''(-1) \\ &= 4\pi i \cdot (-1-2i) \cdot 2i = 8\pi + 16\pi i. \end{aligned}$$

2.

a) Parametrize-se a circunferência usando $z(\theta) = e^{i\theta}$ com $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. Tem-se

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \log z\, dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (i\theta) i e^{i\theta}\, d\theta \\ &= i\theta e^{i\theta}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} i e^{i\theta}\, d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

b) Não existe nenhuma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ cuja derivada seja o logaritmo do enunciado porque ele é descontínuo e a derivada de uma função holomorfa é holomorfa. O maior subconjunto aberto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ onde o logaritmo do enunciado é primitivável é $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ com o eixo imaginário negativo removido. De facto, como este é um conjunto simplesmente conexo onde o logaritmo é holomorfo, pelo Teorema de Cauchy, o integral da função sobre qualquer curva fechada contida no conjunto vale zero. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a função é primitivável.

3.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{16+z^4} &= \frac{1}{16z^2} \cdot \frac{1}{1-(-(\frac{z}{2})^4)} = \frac{1}{16z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{2^{4n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n-2}}{2^{4(n+1)}},\end{aligned}$$

válido para $0 < |z| < 2$. O ponto zero é um pólo de segunda ordem da função.

4.

a)

$$\cos \frac{1}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)! z^{6n}}.$$

Uma vez que $\frac{\sin z}{z}$ tem uma singularidade removível em 0, a função tem uma singularidade essencial em zero. $z \mapsto \cos \frac{1}{z^3}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Seja g a função inteira definida por $g(z) = \frac{\sin z}{z}$ para $z \neq 0$, $g(0) = 1$.

$$\frac{\sin z}{(z-2\pi)^2 z} = \frac{1}{(z-2\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(2\pi)}{n!} (z-2\pi)^n,$$

para todo o $z \neq 2\pi$. Tem-se $g(2\pi) = 0$ e $g'(2\pi) = \frac{z\cos z - \sin z}{z^2}\Big|_{z=2\pi} = \frac{1}{2\pi}$. A função tem um pólo de primeira ordem em 2π.

b) Da alínea anterior, $\mathrm{Res}_{z=2\pi} f(z) = \frac{1}{2\pi}$. Logo, o integral pedido vale i.

5. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-4i, 4i\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4^2)^2} = \frac{z^2}{(z+4i)^2(z-4i)^2}$. Tem-se,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-4i)^2}, \text{ com } g(z) = \frac{z^2}{(z+4i)^2}.$$

A função g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-4i\}$. Seja $R > 4$ e $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0 \wedge |z| \leq R\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0 \wedge |z| = R\}$. Pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\, dz &= \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-4i)^2}\, dz = 2\pi i g'(4i) = 2\pi i \left[\frac{8iz(z+4i)}{(z+4i)^4}\right]_{z=4i} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{2^8}{2^{12}} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\pi}{8} = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\, dz. \quad (*)$$

O cálculo seguinte mostra que o integral ao longo da semi-circunferência tende para zero quando $R \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \left|\int_{|z|=R \wedge \Im z>0} f(z)\, dz\right| &\leq \int_{|z|=R \wedge \Im z>0} \frac{R^2}{(R^2-4^2)^2} |dz| \\ &= \frac{\pi R^3}{(R^2-4^2)^2} \to 0 \text{ quando } R \to +\infty. \end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os membros de $(*)$ quando $R \to +\infty$, conclui-se que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$.

6. Por hipótese, tem-se

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

Para

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^p}$$

ter um pólo de ordem 3 em a, deve tomar-se $p = k + 3$. Então,

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!(z-a)^3} + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!(z-a)^2} + \frac{f^{(k+2)}(a)}{(k+2)!(z-a)} + \frac{f^{(k+3)}(a)}{(k+3)!} + \frac{f^{(k+4)}(a)(z-a)}{(k+4)!} + \dots,$$

para z numa vizinhança de a com o ponto a removido, e o resíduo de g em a é $\frac{f^{(k+2)}(a)}{(k+2)!}$.