Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 9 de Abril de 2016

LEGM e MEC

Resolução

1. Calcule:

a) $\frac{-7+17i}{26}$;

b) $\sqrt{13}$;

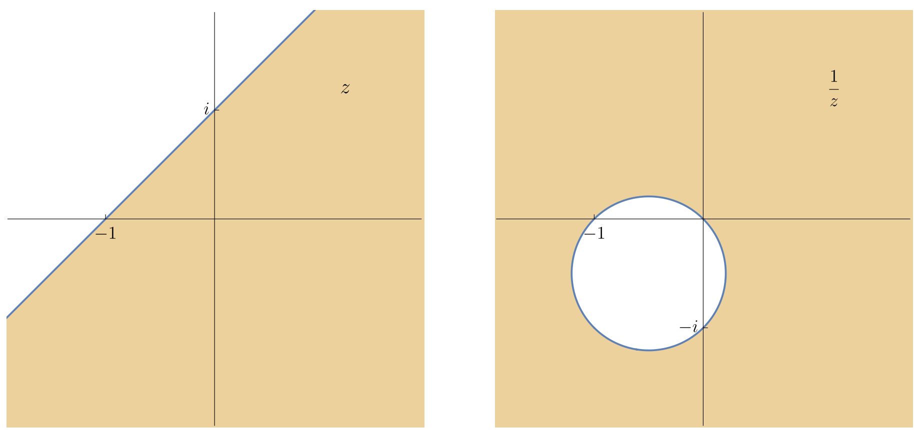
c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}$;

d) $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{3\pi i}{4}$;

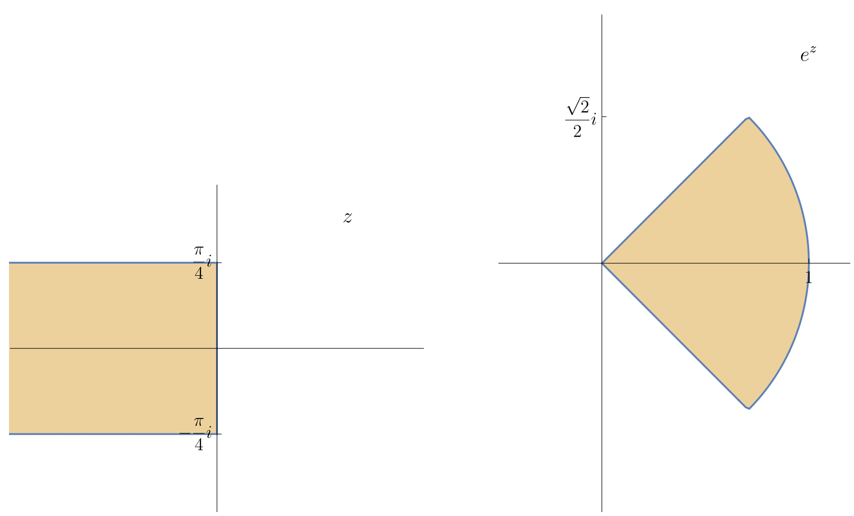
e) $2e^{\frac{\pi i}{2}}$, $2e^{\frac{7\pi i}{6}}$, $2e^{\frac{11\pi i}{6}}$.

2.

a)



b)



3. A função é descontínua no eixo real negativo. Fora do fecho desta semi-recta, S, $f_r = -\frac{2}{r^2}$ e $f_\theta = -i$. Como estas funções são contínuas, f é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C}\backslash S$. A equação de Cauchy-Riemann, $f_r = -\frac{i}{r} f_\theta$, verifica-se se $-\frac{2}{r^2} = -\frac{1}{r} \Leftrightarrow r = 2$. A função é diferenciável no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\} \setminus \{-2\}$. A sua derivada vale $f'(2e^{i\theta}) = e^{-i\theta} f_r(2e^{i\theta}) = -\frac{e^{-i\theta}}{2}$.

4.

a) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z-3}\, dz = 0$ porque a curva não dá nenhuma volta em torno do ponto 3;

b) Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, $\int_L \left(e^{3\pi z} + \frac{1}{z^3}\right) dz = \left(\frac{e^{3\pi z}}{3\pi} - \frac{1}{2z^2}\right)\Big|_1^i = 1 - \frac{1}{3\pi} - \frac{e^{3\pi}}{3\pi}$;

c) Usa-se a Fórmula Integral de Cauchy com $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-6)}$, $a = 4$, $n = 0$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 2 < \Re z < 6\}$: $\int_{|z-4|=1} \frac{1}{(z-2)(z-4)(z-6)}\, dz = 2\pi i \left.\frac{1}{(z-2)(z-6)}\right|_{z=4} = -\frac{\pi i}{2}$;

d) Usa-se a Fórmula Integral de Cauchy com $f(z) = \log z + e^{2z}$, $a = 4$, $n = 2$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$: $\int_{|z-4|=1} \frac{\log z + e^{2z}}{(z-4)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2}(\log z + e^{2z})\Big|_{z=4} = \pi i(-\frac{1}{16} + 4e^8)$.

5.

$$\begin{aligned}
\frac{\log z}{(z-e)^3} &= \frac{1}{(z-e)^3}\left[\ln e + \frac{1}{e}(z-e) - \frac{1}{e^2}\frac{1}{2!}(z-e)^2 + \frac{2}{e^3}\frac{1}{3!}(z-e)^3 + \dots\right] \\
&= \frac{1}{(z-e)^3} + \frac{1}{e}\frac{1}{(z-e)^2} - \frac{1}{2e^2}\frac{1}{(z-e)} + \frac{1}{3e^3} + \dots .
\end{aligned}$$

O desenvolvimento é válido para $0 < |z-e| < e$ porque o logaritmo principal não é diferenciável no eixo real negativo e não está definido em zero. A singularidade e é um polo de terceira ordem. O resíduo da função no ponto e é $-\frac{1}{2e^2}$.

6. Seja Ω a região limitada por γ. Usando o Teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{z}\, dz &= \int_\gamma (\overline{z}\, dx + i\overline{z}\, dy) \\
&= \iint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}(i\overline{z}) - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{z})\right) dxdy = 2i \iint_\Omega dxdy = 2i|\Omega|,
\end{aligned}$$

onde $|\Omega|$ designa a área de Ω.