Análise Complexa e Equações Diferenciais

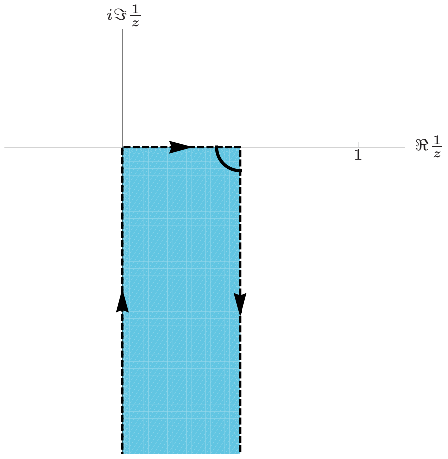
1º Teste - 3 de Novembro de 2012

LMAC, MEBiom e MEFT

Resolução

1.

a)



b) O ângulo assinalado e a sua imagem são iguais porque a função $z \mapsto \frac{1}{z}$ é diferenciável no ponto 2 e a sua derivada não se anula nesse ponto.

2.

a) Tem-se

$$\begin{aligned} f_r(re^{i\theta}) &= (\ln r + 1 - 2r)e^{i\theta}, \\ f_\theta(re^{i\theta}) &= i(r\ln r - r^2)e^{i\theta}, \\ -\tfrac{i}{r}f_\theta(re^{i\theta}) &= (\ln r - r)e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Como as derivadas parciais f_r e f_θ são contínuas (em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$), f é $\mathbb{R}$-diferenciável em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. A equação de Cauchy-Riemann é satisfeita quando

$$\ln r + 1 - 2r = \ln r - r \iff r = 1.$$

A função f é diferenciável na circunferência de raio 1 centrada na origem. A sua derivada é

$$f'(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}f_r(e^{i\theta}) = \ln 1 + 1 - 2 = -1.$$

b) Como

$$\lim_{r\to 0}(r\ln r) = \lim_{r\to 0}\frac{\ln r}{1/r} = \lim_{r\to 0}\frac{1/r}{-1/r^2} = 0,$$

tem-se,

$$\lim_{|z|\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0}(r\ln r - r^2)e^{i\theta} = 0.$$

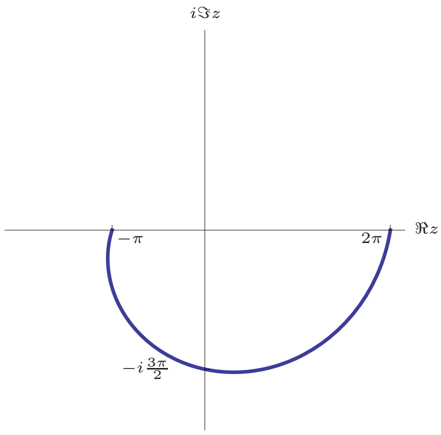
A função f é prolongável por continuidade à origem. Designando por g o prolongamento contínuo de f,

$$g'(0) = \lim_{r\to 0}\frac{g(re^{i\theta}) - g(0)}{re^{i\theta} - 0} = \lim_{r\to 0}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} = \lim_{r\to 0}(\ln r - r) = -\infty.$$

O prolongamento de f não é diferenciável na origem.

3.

a)



b)

$$\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{z}\,dz = \int_{\pi}^{2\pi}\frac{z'(\theta)}{z(\theta)}\,d\theta = \int_{\pi}^{2\pi}\left(i + \frac{1}{\theta}\right)d\theta = i\pi + \ln 2.$$

c) Pelo Teorema de Cauchy aplicado a $z \mapsto \frac{1}{z}$ no simplesmente conexo $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} : \Re z = 0 \text{ e } \Im z \geq 0\}$, tem-se

$$\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{z}\,dz = \int_{\gamma}\frac{1}{z}\,dz + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{x}\,dx = i\pi + \ln 2.$$

4.

a) Factorizando $z^2 - 2z + 2$, obtém-se

$$z^2 - 2z + 2 = (z - (1 - i))(z - (1 + i)).$$

Seja $R > 1$. De acordo com a Fórmula integral de Cauchy, com

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Re z = 1 \text{ e } \Im z \leq -1\},$$

$a = 1 + i$ e $f(z) = 1/(z - (1 - i))$, verifica-se que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\{z\in\mathbb{C}:|z-1|<R,\ \Im z>0\}} \frac{1}{z^2 - 2z + 2}\, dz &= \int_{\partial\{z\in\mathbb{C}:|z-1|<R,\ \Im z>0\}} \frac{1/(z - (1 - i))}{z - (1 + i)}\, dz \\
&= 2\pi i \left.\frac{1}{z - (1 - i)}\right|_{z=1+i} \\
&= \pi,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\substack{|z-1|<R,\\ \Im z=0}} f(z)\, dz + \int_{\substack{|z-1|=R,\\ \Im z>0}} f(z)\, dz = \pi. \tag{1}$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\substack{|z-1|=R,\\ \Im z>0}} \frac{1}{z^2 - 2z + 2}\, dz \right| &\leq \int_{\substack{|z-1|=R,\\ \Im z>0}} \frac{1}{|z^2 - 2z + 2|}\, |dz| \\
&= \int_{\substack{|z-1|=R,\\ \Im z>0}} \frac{1}{|(z - 1)^2 + 1|}\, |dz| \\
&\leq \int_{\substack{|z-1|=R,\\ \Im z>0}} \frac{1}{||z - 1|^2 - 1|}\, |dz| \\
&= \int_{\substack{|z-1|=R,\\ \Im z>0}} \frac{1}{R^2 - 1}\, |dz| \\
&= \frac{\pi R}{R^2 - 1} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } R \to +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, calculando o limite de ambos os membros de (1), quando $R \to +\infty$, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\substack{|z-1|<R,\\ \Im z=0}} f(z)\, dz = \pi.$$

b) Tem-se

$$\frac{1}{z^2 - 2z + 2} = \frac{1}{z - (1 + i)} g(z), \quad \text{com } g(z) = \frac{1}{z - (1 - i)}.$$

A função g pode ser expandida em série de Taylor em torno do ponto $1+i$. Para $0 < |z-(1+i)| < 2$, vem

$$\frac{1}{z^2-2z+2} = \frac{1}{z-(1+i)}\Big[g(1+i)+g'(1+i)(z-(1+i)) + \tfrac{g''(1+i)}{2!}(z-(1+i))^2+\ldots\Big].$$

O primeiro termo da série de Laurent de $z \mapsto \frac{1}{z^2-2z+2}$ em $0<|z-(1+i)|<2$ é

$$\frac{1}{z-(1+i)}g(1+i) = \frac{-i/2}{z-(1+i)}.$$

A singularidade $1+i$ é um pólo de primeira ordem e o resíduo da função em $1+i$ é $-i/2$.

5.

a) Determine-se $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que a soma de (x_1,x_2,x_3) com o múltiplo λ de $(x_1,x_2,x_3)-(0,0,1)$ é $(\alpha,\beta,0)$:

$$(\alpha,\beta,0) = (x_1,x_2,x_3)+\lambda(x_1,x_2,x_3-1).$$

Da equação para as terceiras coordenadas, obtém-se $\lambda = \frac{x_3}{1-x_3}$. Logo,

$$\alpha+i\beta = \mathcal{P}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1}{1-x_3}+i\frac{x_2}{1-x_3}.$$

b) A projecção estereográfica do ponto simétrico de (x_1,x_2,x_3) é

$$\tilde{\alpha}+i\tilde{\beta} = \mathcal{P}[-(x_1,x_2,x_3)] = -\frac{x_1}{1+x_3}-i\frac{x_2}{1+x_3}.$$

O inverso de $\alpha+i\beta$ é

$$\frac{1}{\alpha+i\beta} = \frac{\frac{x_1}{1-x_3}-i\frac{x_2}{1-x_3}}{\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_3)^2}} = \frac{\frac{x_1}{1-x_3}-i\frac{x_2}{1-x_3}}{\frac{1+x_3}{1-x_3}} = \frac{x_1}{1+x_3}-i\frac{x_2}{1+x_3}.$$

A relação entre $\tilde{\alpha}+i\tilde{\beta}$ e o conjugado do inverso de $\alpha+i\beta$ é

$$\tilde{\alpha}+i\tilde{\beta} = -\frac{1}{\overline{\alpha+i\beta}}.$$