Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 4 de Novembro de 2017

MEC

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Calcule $\log\left(\frac{\sqrt{3}e}{2} + i\frac{e}{2}\right)$, onde o logaritmo é o principal. (1)

2. Escreva e^{iz^2} na forma cartesiana. Identifique o seu módulo e argumento. Escreva o desenvolvimento de e^{iz^2} em série de potências com centro em 0, indicando a região de validade. (2)

3. Esboce a região S e a sua imagem por f:

a) $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1 \text{ e } \Im z > \Re z\}, \ f(z) = \frac{1}{z}$. (2)

b) $S = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0 \text{ e } 0 < \Im z < \pi\}, \ f(z) = e^z$. (2)

4. Calcule $\int_{|z-1|=1} \overline{z}\, dz$, onde a circunferência é descrita no sentido directo. (2)

5. Estude a diferenciabilidade de $f(x + iy) = e^{ix^2}y$ e calcule a sua derivada. (3)

6. Considere a função $g : \mathbb{C} \setminus \{-1, 4\} \to \mathbb{C}$, definida por $g(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z-4)^3}$.

a) Calcule $\int_{|z-3|=2} g(z)\, dz$ usando a fórmula integral de Cauchy, indicando explicitamente a versão da fórmula que está a usar, as suas hipóteses e o conjunto onde a está a aplicar. Simplifique o resultado. (3)

b) Desenvolva g em série de Laurent em torno do ponto 4, numa vizinhança deste ponto com o ponto removido, indicando a região de validade, classificando a singularidade e calculando o resíduo da função neste ponto. (2)

7.

a) Determine todas as soluções de $e^z = e^{-\frac{1}{z}}$. Simplifique o resultado. (2)

b) De entre as soluções com parte imaginária positiva, identifique a(s) solução(ões) de menor módulo, se existirem. (1)