

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 5 de Novembro de 2016

LEMat e MEAer

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Apresentando o resultado na forma cartesiana, calcule:

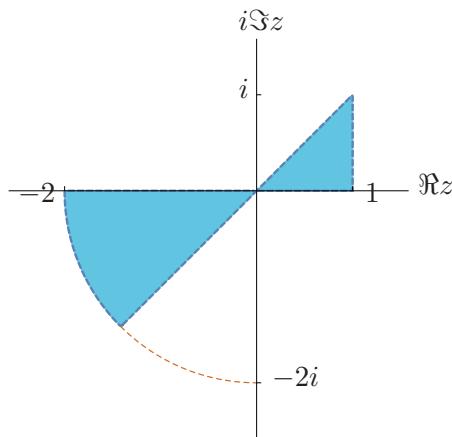
a) $(1+i)^7$; (1)

b) $\log(e^{2+5\pi i})$, onde \log designa o logaritmo principal; (1)

c) as raízes quadradas de $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. (1)

d) Determine para que valores de z , satisfazendo $\Re z = 1$, $|e^{\frac{-i}{z}}|$ é máximo. (1)

2. Esboce a imagem do conjunto sombreado na figura por $z \mapsto \frac{1}{z}$. (2)



3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por (2)

$$f(re^{i\theta}) = \ln r - i \cos \theta.$$

Estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada.

4.

a) Esboce a curva γ representada parametricamente por $z(\theta) = \theta e^{-i\theta}$ para $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 3\pi$. Calcule $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, simplificando o resultado. (2)

b) Calcule $\int_{|z-3|=1} \frac{1}{(z-1)(z-3)^3} dz$ usando a Fórmula Integral de Cauchy. (2)

c) (i) Escreva a série de Laurent da função integranda na alínea anterior numa vizinhança de 3, com o ponto 3 removido, calculando explicitamente todos os coeficientes da série. (ii) Qual a região de validade da expansão? (iii) Classifique a singularidade $z = 3$. (iv) Qual é o resíduo da função no ponto 3?

d) Classifique as singularidades de (2)

$$z \mapsto \frac{e^z - e^{\sin z}}{z^4}$$

e calcule os resíduos da função.

5. Considere a função

$$w \mapsto \log \left(i \frac{w+1}{w-1} \right),$$

onde o logaritmo é o principal.

- a) Qual é o conjunto de pontos onde a função é diferenciável? Justifique. (1.5)
 b) Qual é o conjunto de pontos onde a função não é diferenciável? Justifique. (1.5)