Análise Complexa e Equações Diferenciais
MEAer, 2020/2021, S1
Segundos mini testes

1. Estude a diferenciabilidade de

$$f(x+iy) = 2xe^{2y-2ix} + ie^{2y}$$

e calcule a sua derivada.
Resposta: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $f'(k\pi) = 2e^{2y}(1 - 2ik\pi)$.

2. Estude a diferenciabilidade de

$$f(x+iy) = \frac{x}{(x+iy)^2} - x$$

e calcule a sua derivada.
Resposta: $\pm(1,0)$. $f'(\pm 1) = -2$.

3. Estude a diferenciabilidade de

$$f(re^{i\theta}) = \ln(r^3) + \frac{1}{r} + i\theta, \quad \text{para } r > 0 \text{ e } \theta \in]-\pi, \pi],$$

e calcule a sua derivada.
Resposta: $r = \frac{1}{2}$ e $\theta \in]-\pi, \pi[$. $f'\left(\frac{1}{2}e^{i\theta}\right) = 2e^{-i\theta}$.

4. Estude a diferenciabilidade de

$$f(re^{i\theta}) = \left(\sqrt{r} + 1\right) e^{i\theta}$$

e calcule a sua derivada.
Resposta: A função não é diferenciável em nenhum ponto.

5. Estude a diferenciabilidade de

$$f(re^{i\theta}) = 2\ln(r^2 + 1) + i\theta, \quad \text{para } \theta \in]-\pi, \pi],$$

e calcule a sua derivada.
Resposta: $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\theta \in]-\pi, \pi[$. $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\theta}\right) = \sqrt{3}e^{-i\theta}$.

6. Estude a diferenciabilidade de

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{r} + i\sin\theta, \quad \text{para } r > 0,$$

e calcule a sua derivada.
Resposta: $r = -\sec\theta$ e $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$. $f'\big(-\sec\theta e^{i\theta}\big) = -\cos^2\theta e^{-i\theta}$.

1. Usando a Fórmula Integral de Cauchy, calcule

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^2}}{(z-1)^3}\, dz.$$

Resposta: $6e\pi i$.

2. Usando a Fórmula Integral de Cauchy, calcule

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{2z^2}}{(z-1)^2(z-3)^2}\, dz,$$

tendo o cuidado de referir as condições que permitem a aplicação da dita fórmula.
Resposta: $\frac{5\pi i e^2}{2}$.

3. Usando a Fórmula Integral de Cauchy, calcule

$$\int_{|z+2|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z+1)(z+2)^2(z+3)^3}\, dz,$$

tendo o cuidado de referir as condições que permitem a aplicação da dita fórmula.
Resposta: $4\pi i$.

4. Usando a Fórmula Integral de Cauchy, calcule

$$\int_{|z-\pi|=\pi} \frac{\cos(z/2)}{(z^2-\pi^2)^2}\, dz,$$

tendo o cuidado de referir as condições que permitem a aplicação da dita fórmula.
Resposta: $-\frac{i}{4\pi}$.

5. Usando a Fórmula Integral de Cauchy, calcule

$$\int_{|z-2i|=1} \frac{\log z}{(z^2+4)^2}\, dz,$$

tendo o cuidado de referir as condições que permitem a aplicação da dita fórmula.
Resposta: $-\frac{\pi}{16}(1 - \ln 2 - \frac{i\pi}{2}) = -\frac{\pi}{16} + \frac{i\pi^2}{32} + \frac{\pi \ln 2}{16}$.

6. Usando a Fórmula Integral de Cauchy, calcule

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{3z}}{(z+i)^{10}}\, dz.$$

Resposta: $\frac{2\pi i}{9!} 3^9 e^{-3i} = \frac{3^5 \pi i}{2^6 \cdot 5 \cdot 7} e^{-3i} = \frac{243}{2240} \pi i e^{-3i}$.

1. $\int_\gamma f(z)\, dz$ é o integral de linha de que campo vectorial? O que afirma o Teorema de Green?

2. Suponha que f é diferenciável em a. Prove que f satisfaz a equação de Cauchy-Riemann em a.

3. Prove que se f é diferenciável em a, então é contínua em a.

4. Suponha que f é diferenciável em a. Relacione $|f'(a)|$ com $\det Df(a)$. Aqui Df refere-se à derivada de f entendida como campo vectorial de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

5. Qual é o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^{3n}$? Enuncie o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema de Cauchy.

6. Suponha que f é inteira. Discuta a diferenciabilidade das funções $z \mapsto f(\overline{z})$ e $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$.