Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre de 2020/21
MEAer
Exercícios para as aulas práticas

I Números complexos

1. Escreva os seguintes números complexos na forma algébrica e represente-os no plano de Argand:

   a) $(2+i)(1-i) = 3-i$,

   b) $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$,

   c) $\frac{2+i}{1+i} = \frac{3-i}{2}$,

   d) $(2-3i)^2 = -5-12i$,

   e) $(1-2i)^3 = -11+2i$,

   f) $i^{81} = i$.

2. Determine o módulo e todos os argumentos de cada dos seguintes números complexos e represente-os no plano de Argand:

   a) $3 = 3e^{i0}$,

   b) $-2 = 2e^{i\pi}$,

   c) $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$,

   d) $3-4i = 5e^{-i\arctan\frac{4}{3}}$,

   e) $-1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

3. Verifique as seguintes propriedades do conjugado:

   a) $\overline{\overline{z}} = z$.

   b) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$,

   c) $\overline{zw} = \overline{z}\;\overline{w}$,

   d) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

4. Verifique as seguintes propriedades do módulo:

   a) $|\overline{z}| = |z|$.

   b) $|zw| = |z|\;|w|$,

c) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,

d) $|z+w| \leq |z| + |w|$,

e) $|z-w| \geq ||z| - |w||$.

5. Calcule as raízes cúbicas de $-8i$ e assinale-as no plano complexo. Resposta: $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $2e^{i\frac{\pi}{2}}$, $2e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

6. Determine para que valores de θ, pertencentes ao intervalo $]-\pi, \pi]$, se tem

$$|1 + e^{i\theta}| = \sqrt{2}.$$

Resposta: $\pm\frac{\pi}{2}$.

7. Sejam z_1, z_2 e z_3 três números complexos de módulo unitário satisfazendo $z_1+z_2+z_3 = 0$. Mostre que esses complexos são vértices de um triângulo equilátero. Sugestão: Comece por reduzir ao caso em que $z_1 = 1$; verifique que então z_2 e z_3 são conjugados; logo $z_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_3 = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8. Determine as soluções das seguintes equações:

   (i) $(1-z)^6 = (1+z)^6$. Resposta: 0, $\pm i\sqrt{3}$, $\pm\frac{i}{\sqrt{3}}$.

   (ii) $1 - z + z^2 = 0$. Resposta: $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

   (iii) $z^6 - z^4 + z^2 - 1 = 0$. Resposta: ± 1, $e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$, $e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$.

   (iv) $1 + z + z^2 + ... + z^7 = 0$. Resposta: -1, $\pm i$, $e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$, $e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$.

II Números complexos, funções complexas

1. Calcule e represente no plano de Argand:

   a) O conjunto $\{z : z^3 = i\}$. Resposta: $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

   b) O conjunto $\{z : z^4 = -1\}$. Resposta: $e^{i\frac{\pi}{4}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

   c) O conjunto $\{z : z^2 = 1 - i\}$. Resposta: $\sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$, $\sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

2. Seja $z \in \mathbb{C}$ fixo. Verifique se os conjuntos

$$\left\{w^2 : w^3 = z\right\} \text{ e } \left\{w : w^3 = z^2\right\}$$

   são iguais.

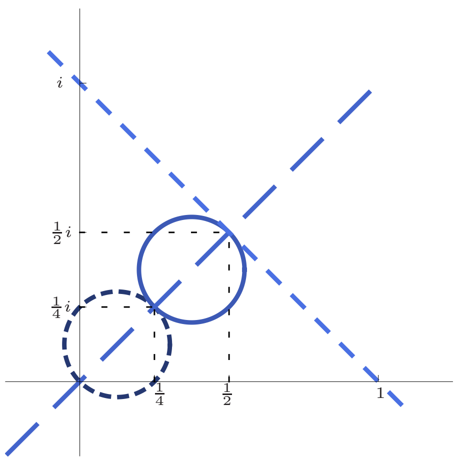
3. a) Determine a equação da reta que passa por -1 e i. Resposta: $(-1+i)\overline{z} + (-1-i)z - 2 = 0$.

   b) Determine a equação da circunferência que tem centro em -1 e passa por i. Resposta: $|z+1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2 + z + \overline{z} - 1 = 0$.

   c) Determine dois pontos da reta $(1-2i)z + (1+2i)\overline{z} - 2 = 0$. Resposta: 1 e $\frac{i}{2}$.

   d) Determine o centro e o raio da circunferência $|z|^2 - (1-i)z - (1+i)\overline{z} + 1 = 0$. Resposta: $1+i$ e 1.

4. Represente a imagem das duas retas e das duas circunferências por $z \mapsto \frac{1}{z}$:



5. Calcule as imagens das regiões R pelas funções f:

   a) $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2,\ \pi/4 < \arg z < \pi/2\}$, $f(z) = z^3$.

   b) $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, $f(re^{i\theta}) = \sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}$ com $-\pi < \theta \leq \pi$.

c) $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f(z) = \frac{1}{z+1}$.
Resposta: $\left\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{Re}\, z > \frac{1}{2}\right\}$

d) $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f(z) = \frac{z-1}{iz+1}$.
Resposta: $\left\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{Im}(1-i)z > 0\right\}$.

e) $R = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \mathcal{Re}\, z < 2,\ 0 < \mathcal{Im}\, z < 1,\ |z-2| > 1\}$, $f(z) = \frac{1}{z-1}$.
Resposta: $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathcal{Re}\, z < \frac{1}{2},\ \left|z + \frac{i}{2}\right| > \frac{1}{2},\ \left|z - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}\right\}$.

f) $R = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{Re}\, z > 1, \mathcal{Im}\, z < 0\}$, $f(z) = \frac{1}{z+i}$.
Resposta: $\left\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2},\ |z + \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}\right\}$

6. Sejam a e b números complexos. Prove usando complexos que

$$\mathcal{Re}\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = 0$$

representa a equação de uma circunferência com diâmetro de extremidades em a e b.

III Transformações conformes e diferenciabilidade de funções complexas

1. Calcule as imagens das regiões R pelas funções f:

   a) $R = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e\, z > 0\}$, $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ (transformação conforme de um semiplano num disco).

   b) $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } \mathcal{I}m\, z > 0\}$, $f(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ (transformação conforme de um semidisco num semiplano).

   c) $R = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i0 \in \mathbb{C} : x \in [-1, 1]\}$, $f(z) = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$ (transformação conforme do complemento de um segmento de reta num semiplano).

2. Estude a diferenciabilidade de $x + iy \mapsto e^x e^{iy}$.
   Resposta: A função é diferenciável em qualquer $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e com derivada igual à função.

3. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por

   $$f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy + \cos y).$$

   Resposta: f é diferenciável quando $y = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso, $f'(z) = 2z$.

4. Estude a diferenciabilidade das funções $z \mapsto \overline{z}^2$, $z \mapsto z^2\overline{z}$ e $z \mapsto |z|\overline{z}$.
   Resposta: Qualquer das funções é diferenciável apenas em $z = 0$ e com derivada nula.

5. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por

   $$f(x + iy) = \tfrac{1}{3}(x + 1)^3 + y^2 + iy.$$

   Resposta: $f'(-2, 0) = 1$ e $f'(0, 0) = 1$.

6. Determine o conjunto dos pontos onde a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por

   $$f(x + iy) = -(x + 1)e^{iy} + i(x - 1)e^{-iy},$$

   é diferenciável.
   Resposta: f é diferenciável quando $x = 0$ ou quando $y = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

IV Diferenciabilidade de funções complexas em coordenadas polares, séries de potências complexas, exponencial, logaritmo

1. Usando a equação de Cauchy-Riemann na forma polar, prove a diferenciabilidade e calcule a derivada de

   a) $z \mapsto 1/z^n$ com $n \in \mathbb{N}_1$;

   b) $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ onde $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}$ com $-\pi < \theta \leq \pi$, onde $n \in \mathbb{N}$. Esta função é diferenciável no eixo real negativo? E em zero?

2. Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = r^2 + i\theta$ para $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, e por $f(0) = 0$.

3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(re^{i\theta}) = (r \ln r - r^2)e^{i\theta}.$$

   a) Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada de f.
   b) Determine se f pode ser prolongada por continuidade à origem. Em caso afirmativo, estude a diferenciabilidade do prolongamento na origem.

4. Determine o raio de convergência de

   a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, Resposta: $R = 1$,
   b) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$, Resposta: $R = 1$,
   c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^n z^n$, Resposta: $R = e^{-1}$,
   d) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, Resposta: $R = 0$,
   e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} z^n$, Resposta: $R = 4$,
   f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2(-1)^n} z^n$, Resposta: $R = 0$,
   g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} z^n$, Resposta: $R = 1/2$.

5. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathcal{Re}\, z < 1,\ 0 < \mathcal{Im}\, z < \pi\}$ por $z \mapsto e^z$.

6. Obtenha o desenvolvimento em série de potências de $\sin z$.

7. Estude a diferenciabilidade de $z \mapsto \log z$, onde

$$\log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta \quad \text{com } -\pi < \theta \leq \pi$$

   é o logaritmo principal.

8. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{Re}\, z < 0,\ |z| > 1\}$ por $z \mapsto \log z$ onde log designa o logaritmo principal.

9. Calcule

   a) $\log(-i)$, Resposta: $-i\pi/2$,

   b) $\log(1-i)$, Resposta: $\ln 2/2 - i\pi/4$,

   c) $\log\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$, Resposta: $i\pi/3$,

   d) i^i. Resposta: $e^{-\pi/2}$,

10. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z \in \mathbb{C}$):

    a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,

    b) $\cos(iz) = \cosh(z)$,

    c) $\sin(iz) = i \sinh z$,

    d) $\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w \ + \cos z \cdot \sin w$.

    e) $\sin\Big(-i \log\big(iz + \sqrt{1-z^2}\big)\Big) = z$.

11. Mostre que a função $\sin z$ é ilimitada em qualquer reta não paralela ao eixo real.

12. Resolva as seguintes equações:

    a) $e^z = -1$, Resposta: $z = i(2k+1)\pi$,

    b) $\log(i - z) = 1$, Resposta: $z = -e + i$,

    c) $\sin z - \cos z = i$, Resposta: $z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ ou $z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$ com $k \in \mathbb{Z}$.

V Integrais de Funções Complexas, Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy

1. Calcule usando a definição

   a) $\int_\gamma \overline{z}\, dz$ onde γ é o segmento de reta que une 1 a $2+3i$. r: $6+3i$.

   b) $\int_\gamma z^2\, dz$, onde γ é o arco de circunferência que une 3 a $1-2i$ e que passa por $1+2i$. r: $\frac{(1-2i)^3}{3} - \frac{3^3}{3}$.

   c) $\int_\gamma \overline{z}\, dz$ onde γ é o troço de parábola $\{x+iy \in \mathbb{C} : y = x^2\}$ com início em 0 e fim em $1+i$. r: $1+\frac{i}{3}$.

   d) $\int_{|z|=r} \arg z\, |dz|$, onde $\arg z$ designa o argumento principal. r: 0.

2. Calcule ao longo de uma curva no primeiro quadrante:

   a) $\int_2^{1+i} z\, dz$; r: $-2+i$

   b) $\int_1^i (1+\sqrt{z})\, dz$, onde $\sqrt{z}$ designa a raiz principal; r: $i-1+\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i-1\right)$;

   c) $\int_0^{1+i\pi/2} e^{2z}\, dz$; r: $-\frac{1+e^2}{2}$

   d) $\int_1^i \frac{1}{z}\, dz$; r: $\frac{i\pi}{2}$.

3. Justifique que

   a) $z \mapsto \int_0^z e^{\sin w}\, dw$,

   b) $z \mapsto \int_0^{z^2} \sin(w^2)\, dw$, e

   c) $z \mapsto \int_0^{\sin z} e^{w^2}\, dw$

   são funções bem definidas. Calcule as suas derivadas. r: $e^{\sin z}$, $2z\sin(z^4)$, e $\cos z\, e^{\sin^2 z}$.

4. Calcule

   a) $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz$; r: $2\pi i$;

   b) $\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)}\, dz$; r: 0;

   c) $\int_{|z|=3} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)}\, dz$; r: $\frac{2\pi i}{9}$;

   d) $\int_{|z|=5} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)}\, dz$; r: 0.

5. Calcule

   a) $\int_{|z|=2,5} \frac{1}{z^2+5z+6}\, dz$; r: $2\pi i$;

b) $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z+1)^n}\, dz$, $n \in \mathbb{Z}$; r: 0 se $n \neq 1$, $2\pi i$ se $n = 1$;

c) $\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^n}\, dz$, $n \in \mathbb{Z}$; r: 0 se $n \leq 0$, $\frac{2\pi i}{(n-1)!} 2^{n-1} e^{-2}$ se $n > 0$;

d) $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz$; r: $-\frac{\pi i}{2}$;

e) $\int_{|z|=3\pi} \frac{\sin z}{z}\, dz$; r: 0.

6. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e considere a função $u(x,y) = x^3\lambda^3 - 3xy^2\lambda$.

   (i) Determine para que valores de λ a função u é harmónica.
   Resposta: $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 1$

   (ii) Considere $\lambda = 1$. Determine uma função inteira f tal que $f(0) = i$ e a parte real de f é u.
   Resposta: $f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + 1)$

   (iii) Calcule o integral
   $$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4}\, dz$$
   onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido direto.
   Resposta: $2\pi i$

7. Seja f uma função inteira que satisfaz $|f(z)| \leq c(1+|z|^3)$ para determinado c em $\mathbb{R}^+$. O que pode afirmar quanto a f? Sugestão: Prove uma generalização do Teorema de Liouville.

8. Sejam $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Suponha f é inteira e que o seu contradomínio não intersecta a bola aberta de raio r centrada em a. Prove que f é constante.

VI Séries de Taylor e de Laurent, Teorema dos Resíduos

1. Calcule o desenvolvimento em série de Taylor ou Laurent em torno do ponto zero, indicando a maior região onde é válido:

   a) $z \mapsto \frac{1}{1-z}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ para $|z| < 1$;

   b) $z \mapsto \frac{1}{1+z}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n$ para $|z| < 1$;

   c) $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ para $|z| < 1$;

   d) $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$; r: $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$ para $|z| < 1$;

   e) $z \mapsto \log(1+z)$; r: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}$ para $|z| < 1$;

   f) $z \mapsto e^z$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ para todo o z;

   g) $z \mapsto \sin z$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo o z;

   h) $z \mapsto \cos z^3$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{6n}}{(2n)!}$ para todo o z;

   i) $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$. r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ para todo o $z \neq 0$;

2. Calcule o desenvolvimento em série de Taylor ou Laurent em torno do ponto a, indicando a maior região onde é válido:

   a) $z \mapsto \frac{1}{z}$ em torno de a; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-a)^n}{a^{n+1}}$ para $|z-a| < |a|$;

   b) $z \mapsto \frac{1}{z^2}$ em torno de $a = 1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n(z-1)^n$ para $|z-1| < 1$;

   c) $z \mapsto \frac{2z}{(z-1)(z-3)}$ em torno de $a = 2$;

   d) $z \mapsto z^3$ em torno de $a = 1$; r: $(z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 3(z-1) + 1$ para todo o z;

   e) $z \mapsto \frac{e^z}{(z-a)}$ em torno de a; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^{n-1}$ para $|z-a| > 0$;

   f) $z \mapsto \frac{1}{z^2-5z+6}$ em torno de $a = 1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n$ para $|z-1| < 1$;

   g) $z \mapsto \log(z^2+2z+2)$ em torno de $a = -1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(z+1)^{2n+2}$ para $|z+1| < 1$.

3. Calcule

   a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}\, dx = \frac{\pi}{2}$;

   b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$;

   c) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)}\, dx = \frac{\pi}{6}$.

   d) $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; sugestão: integre ao longo de um contorno que contenha um terço de circunferência de raio R e dois segmentos de reta, de zero a R e de zero a $Re^{i2\pi/3}$.

4. Calcule o desenvolvimento em série de Laurent da função $f : \mathbb{C}\setminus\{1,2\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$:

   a) na região $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-(n+1)} - 1)z^n$;
   b) na região $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} + \frac{z^n}{2^{n+1}}$;
   c) na região $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{z^{n+1}}$.
   d) Calcule $\int_{|z|=r} f(z)\, dz$ para $r = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{2}$; r: 0, $2\pi i$ e 0.

5. Em que regiões se pode desenvolver em série $z \mapsto \frac{1}{z^4+4}$ em torno de $2+2i$? Resposta: Em 4 regiões, $|z-(2+2i)| < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < |z-(2+2i)| < \sqrt{10}$, $\sqrt{10} < |z-(2+2i)| < 3\sqrt{2}$ e $|z-(2+2i)| > 3\sqrt{2}$.

6. Calcule
$$\int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z}\, dz,$$
com a circunferência descrita no sentido direto. Classifique as singularidades da função integrada. Resposta: $-\frac{\pi i}{3}$, singularidade essencial em 0.

7. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \frac{\log(1-z)}{z^4}$, onde log designa o logaritmo principal.

   a) Desenvolva f em série de Laurent, em torno de 0. R: $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n}$.
   b) Calcule $\int_{\partial\{z\in\mathbb{C}:|\mathcal{Re}\, z|<\frac{1}{2},\ |\mathit{Im}\, z|<2\}} f(z)\, dz$, integrando e série de Laurent e usando a Fórmula Integral de Cauchy. R: $-\frac{2\pi i}{3}$.

VII Esboço de campos de direções

1. Esboce os campos de direções e os gráficos das soluções das seguintes equações diferenciais:

   a) $y' = y(y^2 - 1)$,

   b) $y' = y^2 + 1$,

   c) $y' = \cos(y - t)$,

   d) $y' = -ty$,

   e) $y' = \frac{y+t}{y-t}$,

   f) $y' = -\frac{y+t}{y-t}$,

   g) $y' = -\frac{4y-6t}{y-3t}$.

2. Determine as curvas ortogonais às soluções de $y' = y$ e esboce-as. Resposta: $\frac{y^2}{2} = -t + c$.

3. Considere $y' = \sqrt{1 - y^2}$. Esboce o campo de direções e os gráficos das soluções. Determine se as retas $y = -1$ e $y = 1$ são assímptotas dos gráficos das soluções ou se as soluções não constantes atingem os valores -1 e 1. Discuta o problema da unicidade de solução. Resposta: $y = \sin(t + c)$ para $t \in \left[-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c\right]$. As soluções com condição inicial $y(t_0) = -1$ ou com condição inicial $y(t_0) = 1$ não são únicas.

4. Esboce o campo de direições de $y' = 2\sqrt{y}$. Determine todas as soluções com $y(0) = 0$. Resposta: Seja $c \in [0, +\infty]$. Então

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq c, \\ (t - c)^2 & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

   é solução do problema.

5. Esboce o campo de direções e os gráficos das soluções da equação diferencial

$$y' = \sin y.$$

   Determine as curvas ortogonais aos gráficos das soluções. Resposta: $\cos y = t + c$.

VIII Edo's escalares de primeira ordem

1. Determine a solução da equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(x_0) = y_0$.

   a) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$. Resposta: $y = y_0e^{x^2-x_0^2} + e^{x^2}(x^2 - x_0^2)$.

   b) $y' - \tan(x)y = \sin x$, com $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k inteiro). Resposta: $y \cos x = y_0 \cos x_0 + \frac{1}{2}(\sin^2 x - \sin^2 x_0)$.

   c) $y' = e^{x+y}$. Solução: $y = -\ln(e^{-y_0} - e^x + e^{x_0})$.

   d) $xyy' + 1 + y^2 = 0$, com $x_0y_0 \neq 0$. Resposta: $y^2 = (1 + y_0^2)\frac{x_0^2}{x^2} - 1$.

   e) $(2x^3+xy^2)+(x^2y+2y^3)y' = 0$, com $y_0 \neq 0$. Resposta: $x^4+x^2y^2+y^4 = x_0^4+x_0^2y_0^2+y_0^4$.

   f) $\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$, com $y_0 \neq -e^{-x_0}$. Resposta: o fator integrante é e^x e a solução $\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} = \frac{y_0^2}{2}e^{x_0} + y_0e^{2x_0}$.

2. Considere a equação diferencial

$$\left(4x^2y + 3xy^2 + 2y^3\right) + \left(2x^3 + 3x^2y + 4xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

   a) Mostre que tem um fator integrante do tipo $\mu = \mu(xy)$.

   b) Mostre que a solução com condição inicial $y(-1) = 1$ é dada implicitamente pela expressão $x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 = 1$.

3. Determine a solução de

$$\frac{1}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = x \ln x$$

   que satisfaz $y(e) = e^2$. Resposta: $y(x) = x^2(x \ln x - x + 1)$.

4. Considere a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$2t + y - yy' = 0.$$

   Verifique que $y - 2t$ é fator integrante. Resolva a equação diferencial. Resposta: $y^2t - \frac{4}{3}t^3 - \frac{1}{3}y^3 = c$.

IX Sistemas de edo's lineares de primeira ordem com coeficientes constantes

1. Calcule a solução de $X' = AX$, com $X(0) = X_0$, e esboce o retrato de fase dos sistemas:

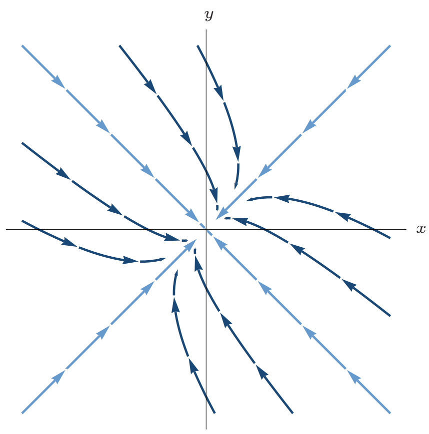
   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Resposta: $X(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{3t}-e^{-t}}{4} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{e^{3t}+e^{-t}}{2} \end{bmatrix} X_0$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$. Resposta: $X(t) = \begin{bmatrix} \frac{4-e^{-3t}}{3} & \frac{4e^{-3t}-4}{3} \\ \frac{1-e^{-3t}}{3} & \frac{4e^{-3t}-1}{3} \end{bmatrix} X_0$.

2. Considere o sistema
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{1}$$

   a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.
   Resposta:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 + y_0}{2} e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   b) Esboce o retrato de fase do sistema, tendo o cuidado de identificar o comportamento assimptótico das soluções quando t tende para $+\infty$.
   Resposta:



3. Considere o sistema
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2}$$

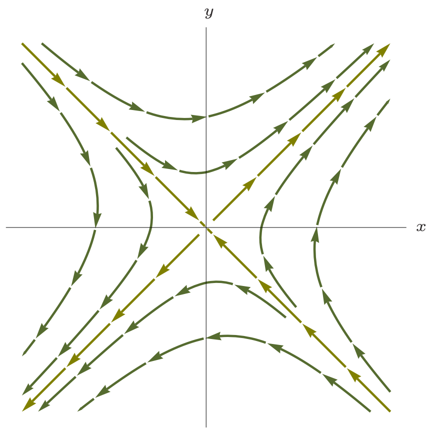
a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

Resposta:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x_0 - y_0}{2} e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{x_0 + y_0}{2} e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Esboce o retrato de fase do sistema.

Resposta:



4. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{3}$$

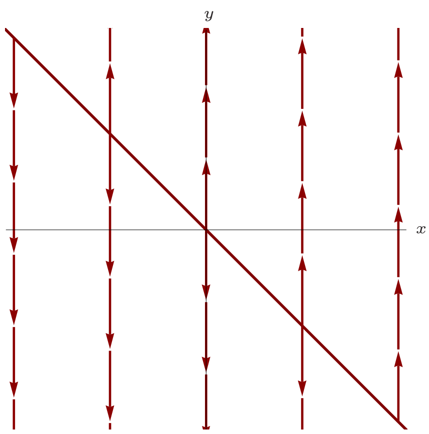
a) Determine a solução que vale $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$.

Resposta:

$$X(t) \;=\; x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (x_0 + y_0) e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Esboce o retrato de fase do sistema.

Resposta:



5. Para cada uma das seguintes matrizes determine e^{At} e esboce o retrato de fase do sistema $X' = AX$:

   a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(4t) & \sin(4t) \\ -\sin(4t) & \cos(4t) \end{bmatrix}$.

   b) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{2t} & -3e^{4t} + 3e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & -e^{4t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$.

   c) $A = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 - 6t & 6t \\ -3t & 1 + 6t \end{bmatrix}$.

   d) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Resposta: $e^{At} = e^{3t}\begin{bmatrix} \cos(2t) + \sin(2t) & -2\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) - \sin(2t) \end{bmatrix}$.

6. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Mostre que

$$e^{At} = e^{t}\begin{bmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{bmatrix}.$$

X Edo's escalares de primeira ordem, Sistemas de edo's lineares de primeira ordem com coeficientes constantes

1. Considere a equação $y' = \frac{t^2-y^2}{2ty}$, com $y_0t_0 \neq 0$. Seja $v = \frac{y}{t}$. Verifique que $\frac{t^2-y^2}{2ty} = \frac{1-v^2}{2v}$ e que $y' = tv' + v$. Determine v e seguidamente y.

   Resposta: $1 - 3v^2 = \frac{c}{t^3}$ e $t^3 - 3ty^2 = c$ $(c = t_0^3 - 3t_0y_0^2)$.

2. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

   em que a, b, c são constantes reais e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

   a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável. Resposta: $\dot{v} = bf(v) + a$.

   b) Resolva o problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1.$$

   Resposta: $y(t) = 1 - 2t - \ln(1 - t)$.

3. Calcule as duas primeiras iteradas de Picard para $y' = t^2 + y^2$ com $y(0) = 0$.
   Resposta:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 0, \\ y_1(t) &= \frac{t^3}{3}, \\ y_2(t) &= \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}. \end{aligned}$$

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \tan y, \\ y(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

   Tomando como iterada de Picard de ordem zero $y_0(t) \equiv \frac{\pi}{4}$, calcule $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Qual o domínio de y_2?
   Resposta:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \frac{\pi}{4}, \\ y_1(t) &= \frac{\pi}{4} + t, \\ y_2(t) &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \ln\Big[\cos\Big(\frac{\pi}{4} + t\Big)\Big], \quad \text{para } -\frac{3\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

5. Considere a equação diferencial

$$y + (4y^2 + 2x)\frac{dy}{dx} = 0$$

a) Mostre que esta equação tem um fator integrante $\mu = \mu(y)$.
   Resposta: $\mu(y) = y$

b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.
   Resposta: $y(x) = \sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+8}}{2}}$

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule e^{At}. Resposta: $e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$.

b) Calcule a solução de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

   Resposta: $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{bmatrix}$.

c) Em termos de coordenadas polares, $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, verifique que o sistema da alínea **b)** pode ser escrito $r' = r$ e $\theta' = 1$, ou seja, $\frac{dr}{d\theta} = r$. Resolva para r em função de θ.

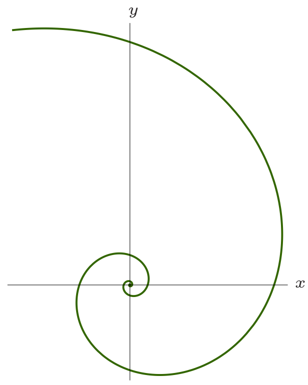
   Resposta: Substituindo $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ no sistema obtém-se

$$\begin{cases} r'\cos\theta - r\sin\theta\,\theta' = r\cos\theta - r\sin\theta, \\ r'\sin\theta + r\cos\theta\,\theta' = r\cos\theta + r\sin\theta. \end{cases}$$

   Multiplicando a primeira equação do sistema por $\cos\theta$, a segunda equação por $\sin\theta$, e adicionando os resultados, vem $r' = r$. Finalmente, substituindo r' por r numa das equações do sistema, conclui-se que $\theta' = 1$. Logo,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr/dt}{d\theta/dt} = \frac{r}{1} = r.$$

   De $\frac{dr}{d\theta} = r$ tira-se $r = r_0 e^{\theta-\theta_0}$.


y
x

XI Edo's lineares escalares de ordem superior a um

1. Determine as soluções de

   a) $y'' - y = 0$. Resposta: $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$;

   b) $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Resposta: $y = \frac{1}{5}e^{4t} + \frac{4}{5}e^{-t}$;

   c) $y'' + y = 0$. Resposta: $y = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$;

   d) $y'' - 2y' + 5y = 0$. Resposta: $y = e^t(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$;

   e) $y'' + 2y' + y = 0$. Resposta: $y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$.

2. Determine as soluções de

   a) $y'' - 5y' + 6y = e^t$. Resposta: $y = \frac{1}{2}e^t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$;

   b) $y'' - 5y' + 6y = e^{2t}$. Resposta: $y = -te^{2t} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$;

   c) $y'' - 5y' + 6y = t + te^t + 1$.
   Resposta: $y = \frac{11}{36} + \frac{t}{6} + \frac{1}{4}(3 + 2t)e^t + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $D^2(D - 1)^2$;

   d) $y'' - 5y' + 6y = \sin(t)$.
   Resposta: $y = \frac{\sin t + \cos t}{10} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $D^2 + 1$;

   e) $y'' - 5y' + 6y = \sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$.
   Resposta: $y = \frac{1}{12} + \frac{5\sin(2t) - \cos(2t)}{104} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $D(D^2 + 4)$;

   f) $y'' + y' - 6y = \sin t + te^{2t}$.
   Resposta: $y = -\frac{1}{25}te^{2t} + \frac{1}{10}t^2 e^{2t} - \frac{7\sin t + \cos t}{50} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$ e o aniquilador do 2º membro é $(D^2 + 1)(D - 2)^2$;

   g) $y'' - 5y' + 6y = te^{2t} \sin(3t)$. Resposta: o aniquilador do 2º membro é $((D-2)^2 + 9)^2$.

XII Séries de Fourier, equação do calor, equação das ondas, equação de Laplace

1. Determine a série de Fourier da função f no intervalo especificado:

   a) $f(x) = x; \quad |x| \leq 1.$
   Resposta: $f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi x)}{1} - \frac{\sin(2\pi x)}{2} + \frac{\sin(3\pi x)}{3} - \dots\right).$

   b) $f(x) = x^2; \quad |x| \leq \pi.$
   Resposta: primitivando por partes, obtém-se

$$\int x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{x^2}{n}\sin(nx) + \frac{2}{n^2}x\cos(nx) - \frac{2}{n^3}\sin(nx).$$

   Isto conduz a

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos(x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \dots\right].$$

2. Seja $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por $g(s) = \sin s$. Determine a expansão de g em série de cossenos. Nota: $2 \sin s \cos(ns) = \sin((n + 1)s) - \sin((n - 1)s)$.
   Resposta:

$$\sin s = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 - 1}\cos(2s) - \frac{1}{4^2 - 1}\cos(4s) - \frac{1}{6^2 - 1}\cos(6s) + \dots\right].$$

3. Determine os valores próprios e as funções próprias do operador $-D^2$ definido no espaço $\{y \in C^2[0, l] : y'(0) = 0 \text{ e } y'(l) = 0\}$.

   Resposta: Os valores próprios são $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$, com $n \in \mathbb{N}_0$, as funções próprias próprias correspondentes são $y_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right)$, com $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} \quad \text{para } (x, t) \in [0, 1] \times [0, +\infty[, \\ u_x(0, t) = 0,\ u_x(1, t) = 0 \quad \text{para } t \in [0, +\infty[, \\ u(x, 0) = 3\cos(2\pi x) - 5\cos(4\pi x) \quad \text{para } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

   Resposta: $u(x, t) = 3e^{-9\cdot 2^2\cdot\pi^2 t}\cos(2\pi x) - 5e^{-9\cdot 4^2\cdot\pi^2 t}\cos(4\pi x).$

5. Determine a solução de

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{para } (x,y) \in [0,a] \times [0,b], \\ u(0,y) = 0 & \text{para } y \in [0,b], \\ u(a,y) = 0 & \text{para } y \in [0,b], \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in [0,a], \\ u(x,b) = f(x) & \text{para } x \in [0,a]. \end{cases}$$

Resposta:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sinh\Big(\frac{n\pi y}{a}\Big) \sin\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big),$$

com

$$d_n = \frac{1}{\sinh\big(\frac{n\pi b}{a}\big)} \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big)\, dx.$$

6. Resolva o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin x & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Resposta:

$$u(x,t) = (c_1 e^{-t} + te^{-t})\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

com

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin(nx)\, dx.$$

7. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u \quad \text{para } (x,t) \in [0,10] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(10,t) = 0 \quad \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = 3\sin(2\pi x) - 7\sin(4\pi x) \quad \text{para } x \in [0,10]. \end{cases}$$

Resposta: $u(x,t) = 3\sin(2\pi x)e^{(1-4\pi^2)t} - 7\sin(4\pi x)e^{(1-16\pi^2)t}$.

8. Determine a solução de

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{para } (x,t) \in [0,\ell] \times [0,+\infty[, \\ u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 \quad \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \quad \text{para } x \in [0,\ell]. \end{cases}$$

no caso

a) $f(x) = \cos\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right)$ e $g(x) = \cos\left(\frac{6\pi x}{\ell}\right)$.

Resposta: $u(x,t) = \cos\left(\frac{4\pi ct}{\ell}\right)\cos\left(\frac{4\pi x}{\ell}\right) + \frac{\ell}{6\pi c}\sin\left(\frac{6\pi ct}{\ell}\right)\cos\left(\frac{6\pi x}{\ell}\right)$.

b) $f \in C^3$, $g \in C^2$, $f'(0) = g'(0) = f'(\ell) = g'(\ell) = 0$.

Referências

[1] **L.V. Ahlfors**. Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.

[2] **M. Braun**. Differential Equations and their Applications, An Introduction to Applied Mathematics, 4th ed., Springer, 1993.

[3] **P.M. Girão**. Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais, IST Press, 2014.

[4] **L.T. Magalhães**. Análise Complexa em Uma Variável e Aplicações, IST, Fevereiro de 2004.

[5] **L.T. Magalhães**. Teoria Elementar de Equações Diferenciais, IST, Junho de 2005.

[6] **L.V. Pessoa**. Introdução à Análise Complexa, IST, Maio de 2008.