Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 30 de Janeiro de 2017

LEMat e MEAer

Soluções

★

1. $\{z \in \mathbb{C} : \left|z+2\right| > 1 \text{ e } \Re z < 1\}$.

2.

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{iy}, \qquad f_y = i\sqrt{1-x^2}\, e^{iy}.$$

$$f_x = -i f_y \iff x = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$f'\Big(-\frac{\sqrt{5}-1}{2} + iy\Big) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} e^{iy}.$$

3.

$$\mathrm{Res}_{z=2i}\, f(z) = i, \qquad \mathrm{Res}_{z=3i}\, f(z) = -\frac{3i}{2}.$$

O integral vale π. Note-se que

$$\left| \int_{\substack{|z|=R \\ \Im z>0}} \frac{5z^2}{(4+z^2)(9+z^2)}\, dz \right| \leq \frac{5R^2}{(R^2-4)(R^2-9)} \pi R,$$

para $R > 3$.

4.

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - a_i},$$

desde que z não seja uma raiz de p. Seja z_0 um zero de p'. Se z_0 coincide com um dos a_i's, digamos $z_0 = a_j$, então $l_j = 1$ os restantes l_i's são nulos, obviamente z_0 está contido no invólucro convexo das raízes de p. Suponhamos que z_0 é diferente de todos os a_i's. Então, tem-se

$$0 = \frac{p'(z_0)}{p(z_0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_0 - a_i}.$$

Daqui tira-se sucessivamente

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{z}_0 - \overline{a}_i}{|z_0 - a_i|^2} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{z_0}{|z_0 - a_i|^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{|z_0 - a_i|^2},$$

$$z_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{|z_0 - a_i|^2}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z_0 - a_j|^2}} a_i.$$

Portanto, $z_0 = \sum_{i=1}^{n} l_i a_i$, onde

$$0 < l_i = \frac{\frac{1}{|z_0 - a_i|^2}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|z_0 - a_j|^2}} < 1$$

e $\sum_{i=1}^{n} l_i = 1$.

5. A equação é separável, sendo a sua forma canónica

$$e^{-3y} y' = e^{2t} + t.$$

A solução é

$$y = -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} e^{2t} - \frac{3}{2} t^2 \right).$$

6. A equação escreve-se

$$(D+1)(D-3)y = e^{-t} + 1.$$

O aniquilador do segundo membro é $D(D+1)$. A solução geral é

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{3t} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} t e^{-t}.$$

7.

$$u(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cosh(ny) \cos(nx)],$$

com

$$c_n = \frac{2}{\pi \cosh(2n\pi)} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

para $n > 0$,

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx.$$

8.

a)

$$e^{\alpha A} = \left[\begin{array}{cc} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right], \qquad e^{\beta B} = \left[\begin{array}{cc} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{array} \right].$$

b) Seja

$$C = \alpha A + s\beta B = \left[\begin{array}{cc} \alpha & s\beta \\ 0 & 0 \end{array} \right].$$

Então

$$C^2 = \left[\begin{array}{cc} \alpha^2 & \alpha s\beta \\ 0 & 0 \end{array} \right], \quad C^3 = \left[\begin{array}{cc} \alpha^3 & \alpha^2 s\beta \\ 0 & 0 \end{array} \right], \quad C^n = \left[\begin{array}{cc} \alpha^n & \alpha^{n-1} s\beta \\ 0 & 0 \end{array} \right].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^C &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!} = \left[\begin{array}{cc} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} & s\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{n!} \\ 0 & 1 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc} e^{\alpha} & s\beta \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha} \\ 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$e^{\alpha A} e^{\beta B} = \left[\begin{array}{cc} e^{\alpha} & \beta e^{\alpha} \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

Conclui-se que $e^{\alpha A} e^{\beta B} = e^{\alpha A + s\beta B}$ se verifica quando

$$s \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} = e^{\alpha} \;\Leftrightarrow\; s = \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}}.$$