Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 27 de Junho de 2016

LEGM e MEC

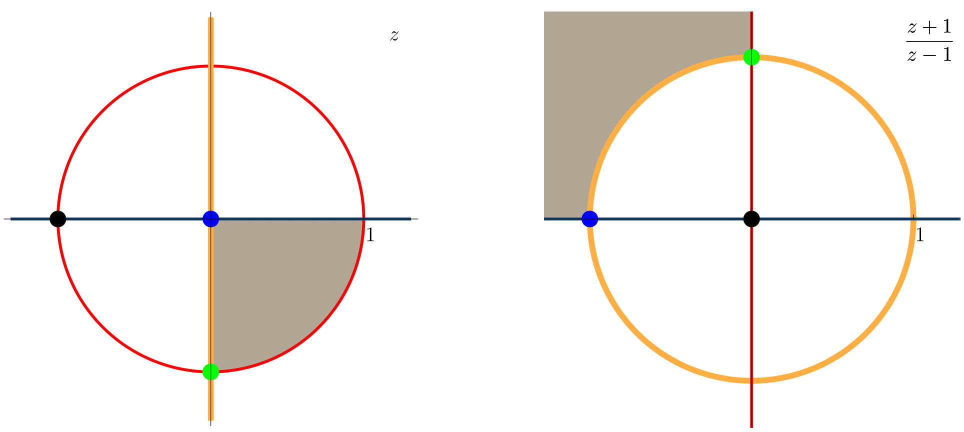
Resolução

1.

a)

$$\frac{\frac{1-i}{2}+1}{\frac{1-i}{2}-1} = \frac{1-i+2}{i-i-2} = \frac{3-i}{-1-i} = -1+2i.$$

b) As rectas e as circunferências que passam em 1 são transformadas em rectas. As rectas e as circunferências que não passam em 1 são transformadas em circunferências. O eixo real é transformado no eixo real porque, sendo z real, $z+1$ e $z-1$ são reais, pelo que o quociente é real. Pontos simétricos em relação ao eixo real são transformados em pontos simétricos em relação ao eixo real. O conjunto e a sua imagem:



2. As derivadas parciais de f são $f_r = \frac{4}{1+r^2}$ e $f_\theta = i$. Uma vez que estas derivadas parciais são contínuas, f é $\mathbb{R}$-diferenciável. Logo, f é diferenciável nos pontos em que satisfizer a equação de Cauchy-Riemann:

$$f_r = -\frac{i}{r} f_\theta \;\Leftrightarrow\; \frac{4}{1+r^2} = \frac{1}{r} \;\Leftrightarrow\; r^2 - 4r + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; r = 2 \pm \sqrt{3}.$$

A função é diferenciável na união das circunferências centradas na origem de raios $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$, com os pontos $-(2-\sqrt{3})$ e $-(2+\sqrt{3})$ removidos. A derivada é

$$f'((2-\sqrt{3})e^{i\theta}) = e^{-i\theta}\frac{4}{1+(2-\sqrt{3})^2} = e^{-i\theta}\frac{1}{2-\sqrt{3}} = (2+\sqrt{3})e^{-i\theta}$$

para $\theta \in]-\pi,\pi[$, e

$$f'((2+\sqrt{3})e^{i\theta}) = e^{-i\theta}\frac{4}{1+(2+\sqrt{3})^2} = e^{-i\theta}\frac{1}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})e^{-i\theta}$$

para $\theta \in]-\pi,\pi[$.

3.

a) Usando o Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{i}{2}} 2z\log(2z)\,dz &= z^2\log(2z)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{i}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{i}{2}} z\,dz \\
&= \left(z^2\log(2z) - \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{i}{2}} \\
&= -\frac{1}{4}\log i + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \;=\; -\frac{1}{4}\log e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4} - i\frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

b)

$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}},$$

para $|z| < 2$.

c) Uma vez que $\sin w = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \dots$ para todo o w, tem-se

$$\begin{aligned}
z^4\sin\frac{1}{z} &= z^4\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \dots\right) \\
&= z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!z} - \frac{1}{7!z^3} + \dots,
\end{aligned}$$

para $z \neq 0$. O ponto $z = 0$ é uma singularidade essencial. 0 resíduo da função em zero é $\frac{1}{5!}$. Finalmente, usando o Teorema dos Resíduos, $\int_{|z|=2\pi} z^4\sin\frac{1}{z}\,dz = \frac{2\pi i}{5!}$.

d) Usa-se a Fórmula Integral de Cauchy com $f(z) = 1/[z(z-7)]$, $a = 3$, $n = 1$ e $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 7\}$:

$$\begin{aligned}
\int_{|z-4|=2}\frac{1}{z(z-3)^2(z-7)}\,dz &= \int_{|z-4|=2}\frac{1/[z(z-7)]}{(z-3)^2}\,dz \\
&= 2\pi i\,\frac{d}{dz}\frac{1}{z(z-7)}\Bigg|_{z=3} \\
&= -2\pi i\,\frac{2z-7}{z^2(z-7)^2}\Bigg|_{z=3} = \frac{\pi i}{72}.
\end{aligned}$$

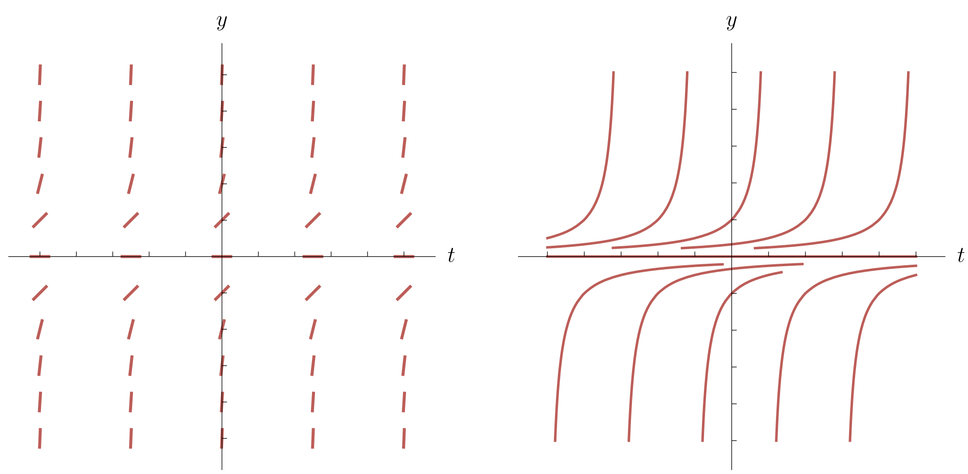
4. Teorema de Cauchy: Seja Ω aberto simplesmente conexo e f holomorfa em Ω. Então, para qualquer curva fechada $\mathcal{C}$ seccionalmente C^1 em Ω, $\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0$. Seja $\mathcal{C}$ uma curva de Jordan orientada positivamente, contida em Ω, e delimitando a região regular S. Seja f holomorfa e de classe C^1 em $\Omega \supset \overline{S}$. Então, como f é de classe C^1, aplicando o Teorema de Green,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz &= \int_{\mathcal{C}} f(z)\,dx + i f(z)\,dy \\ &= \iint_S \left(i\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy \;=\; 0\end{aligned}$$

porque, sendo holomorfa, f satisfaz a equação de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$.

5.

a) Esboço do campo de direcções e do gráfico das soluções:



b) A equação é separável sendo a sua forma canónica

$$\frac{1}{y^2}y' = 1.$$

Como $\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y}$, a equação diferencial pode ser reescrita na forma

$$-\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 1$$

ou, usando a derivada da função composta,

$$-\frac{d}{dt}\frac{1}{y} = 1.$$

Primitivando ambos os membros em ordem a t, vem

$$-\frac{1}{y(t)} = t + c.$$

Substituindo t por 1 e usando a condição inicial $y(1) = -1$, obtém-se $c = 0$. Logo,

$$y = -\frac{1}{t}.$$

6. Desginando por D o operador de derivação, a equação pode escrever-se

$$y'' - 3y' + 2y = 4te^{3t} \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - 3D + 2)y = 4te^{3t} \quad \Leftrightarrow \quad (D-1)(D-2)y = 4te^{3t}.$$

Uma vez que o operador $(D-3)^2$ aniquila o segundo membro, esta equação implica

$$(D-3)^2(D-1)(D-2)y = 0,$$

cuja solução geral é

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t} + c_4te^{3t}.$$

Substituindo na equação original vem

$$(D-1)(D-2)(c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{3t} + c_4te^{3t}) = 4te^{3t},$$

ou seja,

$$(D-1)(D-2)(c_3e^{3t} + c_4te^{3t}) = 4te^{3t}.$$

Calculando o primeiro membro, obtém-se

$$(2c_3 + 3c_4)e^{3t} + 2c_4te^{3t} = 4te^{3t}.$$

Conclui-se que $2c_3 + 3c_4 = 0$ e $2c_4 = 4$, isto é, $c_3 = -3$ e $c_4 = 2$. Logo,

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t} - 3e^{3t} + 2te^{3t},$$

onde as constantes c_1 e c_2 estão livres.

7. Faz-se o prolongamento de u a $[-\pi, \pi] \times [0, \infty[$ como função par em x e, a seguir, faz-se o prolongamento de u a $]-\infty, +\infty[\times[0, \infty[$ como função periódica em x, de período 2π. Para cada t fixo com $t \geq 0$, a função $u(\,\cdot\,, t)$ pode ser desenvolvida em série de Fourier. Os coeficientes da série dependerão de t. Vem

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\cos(nx).$$

Se u é desta forma, então satisfaz, formalmente, as condições fronteira.

Para que u satisfaça a equação diferencial, deve ter-se

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - u \Leftrightarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t)\cos(nx) &= \sum_{n=0}^{\infty} -n^2 a_n(t)\cos(nx) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\cos(nx) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t)\cos(nx) &= \sum_{n=0}^{\infty} -(n^2+1)a_n(t)\cos(nx). \end{aligned}$$

Os coeficientes de Fourier ficam univocamente determinados pela função que representam, logo

$$a_n'(t) = -(n^2+1)a_n(t),$$

para todo o $n \in \mathbb{N}_0$. Chega-se a

$$a_n(t) = c_n e^{-(n^2+1)t},$$

com c_n constantes. Estes resultados conduzem a

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-(n^2+1)t}\cos(nx). \tag{1}$$

Resta garantir as condições iniciais. Escolhendo $t = 0$ em (1), obtém-se

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) = 3 - 5\cos(7x)$$

As constantes c_n são os coeficientes de Fourier de $3-5\cos(7x)$. Assim, $c_0 = 3$, $c_7 = -5$ e os outros $c_n's$ são nulos. A solução é

$$u(x,t) = 3e^{-t} - 5e^{-50t}\cos(7x).$$

8. Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(2x-y)$, obtém-se

$$\mu(2x-y)(8x-y+6) - 3\mu(2x-y)(x+1)y' = 0.$$

Para que esta equação seja exacta deve ter-se

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(2x-y)(8x-y+6)] = \frac{\partial}{\partial x}[-3\mu(2x-y)(x+1)],$$

ou

$$\begin{aligned} &-\mu'(2x-y)(8x-y+6) - \mu(2x-y) \\ &\qquad = -6\mu'(2x-y)(x+1) - 3\mu(2x-y). \end{aligned}$$

Esta equação é equivalente a

$$s\mu'(s) = 2\mu(s),$$

onde $s = 2x - y$. Portanto, $\mu(s) = s^2 = (2x-y)^2$ é factor integrante da equação dada. A equação

$$(2x-y)^2(8x-y+6) - 3(2x-y)^2(x+1)y' = 0.$$

é exacta. Os potenciais do campo associado à equação satisfazem

$$\begin{cases} \phi_x = (2x-y)^2(8x-y+6), \\ \phi_y = -3(2x-y)^2(x+1). \end{cases}$$

Primitivando ambos os membros da equação para ϕ_y, obtêm-se

$$\phi(x,y) = (2x-y)^3(x+1) + c(x).$$

Derivando ambos os membros desta igualdade em ordem a x, vem

$$\begin{aligned} \phi_x &= 6(2x-y)^2(x+1) + (2x-y)^3 + c'(x) \\ &= (2x-y)^2(6x+6+2x-y) + c'(x) \\ &= (2x-y)^2(8x-y+6) + c'(x) \end{aligned}$$

Comparando com a expressão obtida acima para ϕ_x, conclui-se que $c'(x) = 0$. Portanto, podemos escolher $c \equiv 0$. As soluções satisfazem

$$\phi = (2x-y)^3(x+1) = \text{constante}.$$

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e período 2π. Então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \tag{2}$$

e

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx)].$$

Derivando formalmente ambos os membros de (2), obtém-se

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [-na_n \sin(nx) + nb_n \cos(nx)].$$

Deverá portanto ser $c_n = nb_n$ e $d_n = -na_n$, para todo o n. Para obter rigorosamente este resultado, observe-se que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}f(x)\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\ &= nb_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}f(x)\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\ &= -na_n. \end{aligned}$$