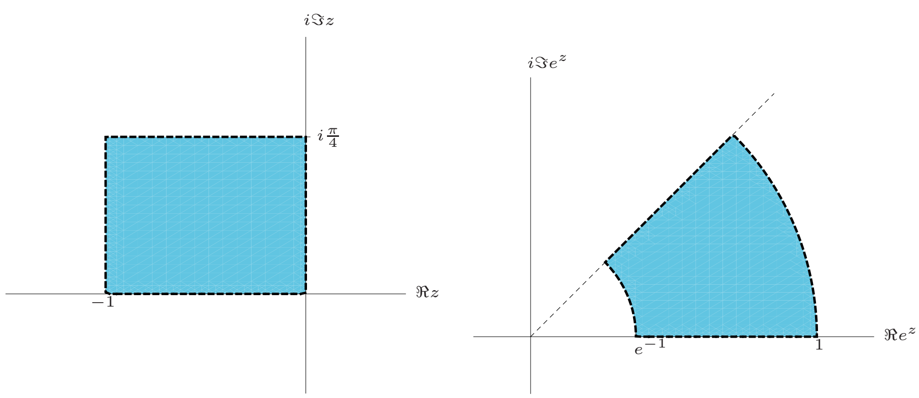
Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame - 24 de Junho de 2013

MEEC

Resolução

1.



2.

a) A função é descontínua no eixo real negativo porque quando z cruza o eixo real negativo do semiplano superior para o semiplano inferior a parte imaginária de f salta de e para e^{-1}. Logo, f não é $\mathbb{R}$-diferenciável no eixo real negativo. Uma vez que as derivadas parciais

$$f_r = 1, \qquad f_\theta = \frac{i}{\pi} e^{\frac{\theta}{\pi}}$$

são contínuas em $\left\{re^{i\theta} : r > 0 \text{ e } \theta \in]-\pi, \pi[\right\}$, f é $\mathbb{R}$-diferenciável neste conjunto.

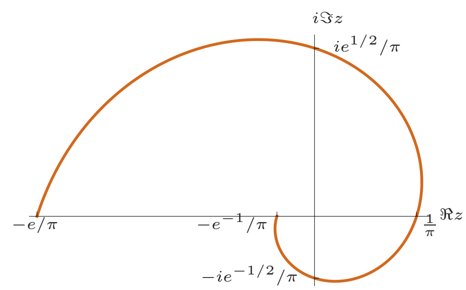
b) Tem-se

$$-\frac{i}{r} f_\theta = \frac{1}{\pi r} e^{\frac{\theta}{\pi}}.$$

A equação de Cauchy-Riemann, $f_r = -\frac{i}{r} f_\theta$, é satisfeita nos pontos em que $r = \frac{1}{\pi} e^{\frac{\theta}{\pi}}$. Tendo em conta a alínea anterior, f é diferenciável em $\left\{re^{i\theta} : r = \frac{1}{\pi} e^{\frac{\theta}{\pi}} \text{ e } \theta \in]-\pi, \pi[\right\}$. A derivada é

$$f'\left(\frac{1}{\pi} e^{\frac{\theta}{\pi}} e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta} f_r\left(\frac{1}{\pi} e^{\frac{\theta}{\pi}} e^{i\theta}\right) = e^{-i\theta}.$$

c)



3.

$$\begin{aligned}
\int_0^{i\pi} z^2 e^{2z}\,dz &= \left(\frac{1}{2}z^2e^{2z}\right)\Big|_0^{i\pi} - \int_0^{i\pi} ze^{2z}\,dz \\
&= \left(\frac{1}{2}z^2e^{2z} - \frac{1}{2}ze^{2z}\right)\Big|_0^{i\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{i\pi} e^{2z}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\left(z^2e^{2z} - ze^{2z} + \frac{1}{2}e^{2z}\right)\Big|_0^{i\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\pi^2 - i\pi\right) = -\frac{\pi}{2}(\pi + i).
\end{aligned}$$

4.

a)

$$\begin{aligned}
\int_{|z-1|=2} \frac{1}{z(z-2)(z-4)}\,dz &= 2\pi i\left(\frac{1}{(z-2)(z-4)}\Big|_{z=0} + \frac{1}{z(z-4)}\Big|_{z=2}\right) \\
&= -\frac{\pi i}{4}.
\end{aligned}$$

b)

$$f(z) = \frac{1}{z-2}g(z) \quad \text{com } g(z) = \frac{1}{z(z-4)}.$$

Desenvolvendo g em série de Taylor em torno de 2, vem

$$g(z) = g(2) + g'(2)(z-2) + \frac{g''(2)}{2!}(z-2)^2 + \dots.$$

Ora,

$$g(2) = -\frac{1}{4}, \qquad g'(z) = -\frac{2z-4}{z^2(z-4)^2}, \quad g'(2) = 0.$$

O desenvolvimento em série de Laurent de f em torno de 2 é

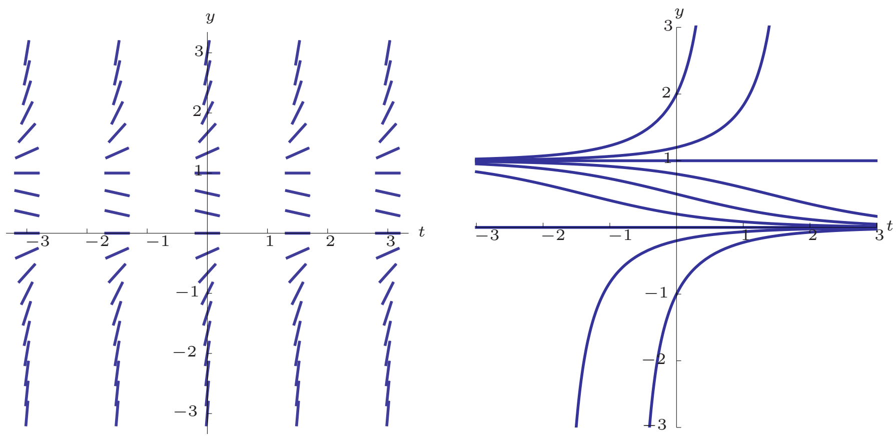
$$f(z) = \frac{-1/4}{z-2} + 0 + \frac{g''(2)}{2!}(z-2) + \dots,$$

válido para $0 < |z-2| < 2$.

c) A singularidade 2 é um pólo de primeira ordem e o resíduo de f em 2 é $-\frac{1}{4}$.

5.

a)



b) A equação é separável

$$\frac{1}{y(y-1)}y' = 1, \quad \text{ou} \quad \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) y' = 1.$$

Usando a derivada da função composta

$$\frac{d}{dt} \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| = 1.$$

Integrando de 0 a t e usando a condição inicial, vem

$$\ln \left| \frac{y-1}{y} \frac{y_0}{y_0-1} \right| = \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| - \ln \left| \frac{y_0-1}{y_0} \right| = t.$$

Logo,

$$\frac{y-1}{y} \frac{y_0}{y_0-1} = e^t$$

porque o primeiro membro é positivo em $t = 0$ e o primeiro membro nunca se anula, uma vez que o segundo membro nunca se anula. Assim,

$$\frac{y-1}{y} = \frac{y_0-1}{y_0} e^t.$$

Resolvendo em ordem a y, obtém-se

$$y = \frac{y_0}{y_0 - (y_0 - 1)e^t}.$$

Embora a dedução apresentada não seja válida para $y_0 = 0$ e para $y_0 = 1$, a expressão final é válida também nestes dois casos.

c) No caso em que $y_0 = \frac{1}{2}$,

$$y = \frac{1}{1 + e^t}.$$

A equação $y(t) = \alpha$ tem solução para $0 < \alpha < 1$.

6.

a) Para que

$$\mu(x)(3x^4 y \ln x + x^4 y + x^2 y^2) + \mu(x)(x^5 \ln x + 2x^3 y)y' = 0$$

seja exacta, deve ter-se

$$\begin{aligned} &\mu(x)(3x^4 \ln x + x^4 + 2x^2 y) \\ &\qquad = \mu'(x)(x^5 \ln x + 2x^3 y) + \mu(x)(5x^4 \ln x + x^4 + 6x^2 y), \end{aligned}$$

isto é

$$\mu(x)(-2x^4 \ln x - 4x^2 y) = \mu'(x)(x^5 \ln x + 2x^3 y).$$

Simplificando, vem

$$x\mu'(x) = -2\mu(x).$$

Conclui-se que $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ é factor integrante.

b) A equação

$$(3x^2 y \ln x + x^2 y + y^2) + (x^3 \ln x + 2xy)y' = 0$$

é exacta. A suas soluções satisfazem

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}[\phi(x, y(x))] = 0 \;\Leftrightarrow\; \phi(x, y(x)) = c,$$

onde

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2 y \ln x + x^2 y + y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^3 \ln x + 2xy.$$

Determinando ϕ, conclui-se

$$\phi = x^3 y \ln x + xy^2 = c,$$

onde c é constante.

7.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

com

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2},\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right]\\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right)\Big|_0^{\pi}\right]\\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right)\right]\\
&= \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar,}\\ 0 & \text{se } n \text{ é par.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots\right).$$

8.

a) Prolonga-se u como função par em x de período 2π. Para cada t fixo, desenvolve-se u em série de Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)\cos(nx).$$

Uma função deste tipo satisfaz formalmente as condições fronteira. Substituindo na equação diferencial

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t)\cos(nx) = -\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n(t)\cos(nx) + e^{-16t}\cos(4x).$$

Da unicidade dos coeficientes de Fourier,

$$\begin{cases} a_n'(t) = -n^2 a_n(t) & \text{para } n \neq 4,\\ a_4'(t) = -16a_4(t) + e^{-16t} & \text{para } n = 4.\end{cases}$$

b) Resolvendo as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem obtém-se

$$\begin{cases} a_n(t) = c_n e^{-n^2 t} & \text{para } n \neq 4, \\ a_4(t) = c_4 e^{-16t} + te^{-16t} & \text{para } n = 4, \end{cases}$$

onde c_n são constantes. Portanto,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \cos(nx) + te^{-16t} \cos(4x).$$

c) Para que seja satisfeita a condição inicial, deve ter-se

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) = \cos(2x),$$

isto é, deve ter-se $c_2 = 1$ e os restantes c_n nulos. Uma solução do problema é

$$u(x,t) = e^{-4t} \cos(2x) + te^{-16t} \cos(4x).$$