Análise Complexa e Equações Diferenciais

30 de Janeiro de 2017

LEMat e MEAer

1º Teste	–	Perguntas 1 – 4	–	90 minutos
2º Teste	–	Perguntas 5 – 8	–	90 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	3 horas

Apresente os cálculos

★

1. Esboce o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \left|z + \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \text{ e } \Re z < 1\}$ e a sua imagem pela transformação de Möbius $z \mapsto \frac{z+3}{z-1}$. (2.5)

2. Considere a função $f : \{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < 1\} \to \mathbb{C}$, definida por (2.5)

$$f(x+iy) = \sqrt{1-x^2}\, e^{iy}.$$

Estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada. Simplifique o resultado.

3. Calcule usando integrais complexos (3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5x^2}{(4+x^2)(9+x^2)}\, dx,$$

justificando cuidadosamente.

4. Seja p o polinómio de grau n com raízes complexas $a_1, \ldots, a_n$ e coeficiente da potência de maior grau igual a α, ou seja, (2)

$$p(z) = \alpha(z-a_1)\ldots(z-a_n).$$

Mostre que as raízes de p' estão contidas no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : z = \sum_{i=1}^n l_i a_i\}$, onde $0 \le l_i \le 1$ e $\sum_{i=1}^n l_i = 1$, i.e. no invólucro convexo das raízes de p. Sugestão: calcule p'/p.

5. Determine a solução de (2)

$$y' = e^{2t+3y} + te^{3y}$$

que satisfaz $y(0) = 0$.

6. Resolva a equação diferencial não homogénea (1.5)

$$y'' - 2y' - 3y = e^{-t} + 1$$

usando o método do aniquilador.

7. Considere o problema (3.5)

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{para } (x, y) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi], \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0 & \text{para } y \in [0, 2\pi], \\ u_y(x, 0) = 0 & \text{para } x \in [0, \pi], \\ u(x, 2\pi) = f(x) & \text{para } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Prolongue a solução de forma conveniente e, para cada y fixo, desenvolva o prolongamento em série de Fourier. Determine uma solução.

8. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que não comutam ($[A, B] := AB - BA = B$).

a) Calcule as exponenciais $e^{\alpha A}$ e $e^{\beta B}$. (2)
b) Determine o valor de s tal que (1)

$$e^{\alpha A} e^{\beta B} = e^{\alpha A + s\beta B}.$$