Análise Complexa e Equações Diferenciais

29 de Janeiro de 2018

MEC

1º Teste	–	Perguntas 1 – 5	–	90 minutos
2º Teste	–	Perguntas 6 – 9	–	90 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	3 horas

Apresente os cálculos

1. Determine a imagem da região $\left\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0 \text{ e } -\frac{3\pi}{8} < \Im z < -\frac{\pi}{8}\right\}$ por $z \mapsto e^{2z}$. (2)

2. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por (2)

$$f(re^{i\theta}) = \sqrt[3]{r}e^{\frac{i\theta^2}{2\pi}}, \quad \text{para } r > 0 \text{ e } -\pi < \theta \leq \pi$$

e calcule a sua derivada. Simplifique o resultado.

3. Calcule $\int_0^{i\pi} z \cos z \, dz$ e simplifique o resultado. (1)

4. Calcule usando integrais de contorno (3,5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} \, dx.$$

5. Seja f inteira satisfazendo $|f(z)| \leq |z|$ para todo o $z \in \mathbb{C}$. Prove que f é um polinómio de grau um. (1,5)

6. Considere a equação diferencial

$$y' = 2 - \frac{y}{x}.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (1,5)
b) Determine a solução que satisfaz $y(1) = 0$. (1,5)

7. Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$ para a equação diferencial (2)

$$(e^{-6y} + e^{6y}) + (-2e^{-6y} + 2e^{6y})y' = 0.$$

Determine a solução que satisfaz $y(0) = 1$. Pode deixar a solução na forma implícita.

8. Calcule a série de cosenos de $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$. Escreva os termos da série de forma simplificada. (2)

9. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{1+t} u_{xx} & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0, \infty[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

a) Determine a solução para $u_0(x) = \sin x + 5\sin(3x)$. (2)

b) Seja u a solução do problema para um dado inicial u_0, onde (1)

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx), \quad \text{com } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \alpha < \infty.$$

Obtenha uma estimativa o decaimento de $\int_0^\pi u^2(x,t)\,dx$ em termos de α.