Análise Complexa e Equações Diferenciais

24 de Junho de 2013

MEEC

1º Teste	–	Perguntas 1 − 4	– 90 minutos
2º Teste	–	Perguntas 5 − 8	– 90 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	– 3 horas

Apresente os cálculos

1. Esboce o conjunto $\left\{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re z < 0 \text{ e } 0 < \Im z < \frac{\pi}{4}\right\}$ e a sua imagem por $z \mapsto e^z$. (1.5)

2. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(re^{i\theta}) = r + ie^{\frac{\theta}{\pi}}, \quad \text{para } \theta \in]-\pi, \pi].$$

a) Analise a continuidade de f e a $\mathbb{R}$-diferenciabilidade de f. (1)

b) Estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada. (1.5)

c) Esboce o conjunto de pontos de diferenciabilidade de f. (0.5)

3. Calcule (1.5)

$$\int_0^{i\pi} z^2 e^{2z}\, dz,$$

simplificando o resultado.

4. Considere $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 2, 4\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{1}{z(z-2)(z-4)}$.

a) Calcule $\int_{|z-1|=2} f(z)\, dz$, onde a circunferência é descrita no sentido directo. (1.5)

b) Determine os termos do desenvolvimento em série de Laurent de f em torno de 2 correspondentes a potências de $z - 2$ de grau estritamente menor do que um. Indique a região em que o desenvolvimento é válido. (1.5)

c) Classifique a singularidade 2 e indique o resíduo de f em 2. (1)

5. Considere a equação diferencial

$$y' = y(y-1).$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (1)

b) Determine a solução que satisfaz $y(0) = y_0$. (1.5)

c) Considere o caso particular em que $y_0 = \frac{1}{2}$. Simplifique a expressão para y. Para que valores de α tem a equação $y(t) = \alpha$ solução? (0.5)

6. Considere a equação diferencial

$$(3x^4 y \ln x + x^4 y + x^2 y^2) + (x^5 \ln x + 2x^3 y)y' = 0.$$

a) Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$. (1)

b) Resolva a equação diferencial. Pode apresentar as soluções na forma implícita. (1)

7. Considere a função f, periódica de período 2π, definida por $f(x) = |x|$ para $x \in [-\pi, \pi]$. Calcule o desenvolvimento de f em série de Fourier, simplificando as expressões para os coeficientes. (1.5)

8. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-16t}\cos(4x) & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = \cos(2x) & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

a) Sabendo que o problema tem uma solução, prolongue a solução de forma conveniente e desenvolva o prolongamento em série de Fourier. Determine equações diferenciais ordinárias para os coeficientes. (1)

b) Determine formalmente as soluções da equação diferencial parcial que verificam as condições fronteira, sem se preocupar em satisfazer a condição inicial. (1.5)

c) Determine uma solução do problema. (1)