Análise Complexa e Equações Diferenciais

15 de Janeiro de 2011

LMAC, MEBiom e MEFT

1º Teste	–	Perguntas 1 – 5	–	90 minutos
2º Teste	–	Perguntas 6 – 10	–	90 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	3 horas

Apresente os cálculos

1. Esboce a região $\left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{1}{2} < \Re z < 1,\ -\pi < \Im z < \frac{\pi}{2}\right\}$ e a sua imagem por $z \mapsto e^z$. Justifique. (1)

2. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por (1)

$$f(x+iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy + \cos y).$$

3. Calcule o desenvolvimento em série de Laurent centrado em zero de $\frac{4}{(z+1)(z-3)}$ válido na maior região aberta contendo o ponto -2, e identifique essa região. Classifique as singularidades da função. (3)

4. Calcule usando integrais de contorno (3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\, dx.$$

Justifique.

5. Prove que se f é diferenciável em a e $f'(a) \neq 0$, então f é conforme em a. (2)

6. Considere a equação diferencial (3)

$$(2y^2 + 3ye^x) + (2y + e^x)y' = 0.$$

Determine a solução que satisfaz $y(x_0) = y_0$, onde $2y_0 + e^{x_0} > 0$.

7. Determine a solução geral da equação diferencial (2)

$$t^2y'' + 2ty' - 6y = 0$$

definida em $\mathbb{R}^+$.

8. Considere o problema de valor inicial (1)

$$\begin{cases} y' = \tan y, \\ y(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Tomando como iterada de Picard de ordem zero $y_0(t) \equiv \frac{\pi}{4}$, calcule $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Qual o domínio de y_2?

9. Seja f de classe C^3 satisfazendo $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$ e $f''(-\pi) = f''(\pi)$. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{para } (x,y) \in [-\pi,\pi] \times [0,\pi], \\ u(-\pi,y) = u(\pi,y) & \text{para } y \in [0,\pi], \\ u_x(-\pi,y) = u_x(\pi,y) & \text{para } y \in [0,\pi], \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in [-\pi,\pi], \\ u(x,\pi) = f(x) & \text{para } x \in [-\pi,\pi]. \end{cases}$$

Suponha que existe uma solução $u \in C^2([-\pi,\pi] \times [0,\pi])$ e estenda-a como função periódica em x, de período 2π.

a) Para cada y fixo desenvolva u em série de Fourier e use o resultado para determinar formalmente uma solução do problema. (2)

b) Determine a solução para $f(x) = 1 + \cos x + \sin(2x)$. (1)

10. Seja $l > 0$. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período $2l$ e de classe C^1. Pode garantir que os coeficientes de Fourier de f convergem para zero? Justifique. (1)