Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º Semestre 2010/2011
21 de Março de 2011
Duração: 45 minutos

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

1) Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -4 \\ \alpha & 2\alpha & 3 & 0 \end{array}\right].$$

a) (1.0) Determine os valores de α para os quais o sistema anterior é possível e determinado.

b) (1.0) Para $\alpha = 1$, determine a solução geral do sistema de equações lineares correspondente.

2) (1.0) Determine a matriz A do tipo 2×2 tal que

$$I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} A = A \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

3) (1.0) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que A é invertível e calcule a entrada $(4, 2)$ de A^{-1}.

4) (1.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $Au = \mathbf{0}$ para qualquer $u \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$. Prove que $A = \mathbf{0}$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º Semestre 2010/2011
21 de Março de 2011
Duração: 45 minutos

Resolução do 1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

1) Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -4 \\ \alpha & 2\alpha & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{-3L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3 \\ -\alpha L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 3(1-\alpha) & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 3(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

a) O sistema é possível e determinado se e só se $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Para $\alpha = 1$, tem-se o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ -4y-8z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z+2 \\ y=-2z-1. \end{cases}$

Fazendo $z = s$, a solução geral do sistema é dada por: $S = \{(s+2, -2s-1, s) : s \in \mathbb{R}\}$.

2) $I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} A = A \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} A = I \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3) $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{-2C_4+C_1\to C_1 \\ -2C_4+C_2\to C_2 \\ -2C_4+C_3\to C_3}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ logo A é invertível.

$$(A^{-1})_{(4,2)} = \frac{1}{\det A} \operatorname{cof} A_{(2,4)} = \frac{1}{-3}(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \times 0 = 0.$$

4) Seja $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $Au = \mathbf{0}$ para qualquer $u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Para cada $j \in \{1, ..., n\}$ fixo, seja $e_j = (\delta_{ij})_{n\times 1} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ em que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j. \end{cases}$ Como

$$Ae_j = \mathbf{0}$$

para todo o $j \in \{1, ..., n\}$ e por outro lado

$$Ae_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

para todo o $j \in \{1, ..., n\}$, então $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ para todo o $j \in \{1, ..., n\}$ pelo que $A = \mathbf{0}$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º Semestre 2010/2011
2 de Maio de 2011
Duração: 45 minutos

2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

1) Considere a matriz dada por: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) (1.0) Determine, justificando, a dimensão do núcleo de A.

b) (0.5) Diga, justificando, se $\{(1,0,0,0)\}$ é uma base do espaço das colunas de A.

2) Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x+y+z+w=0\}$.

a) (1.0) Determine uma base para U.

b) (0.5) Determine uma base para U que inclua os vectores $(1,-1,-1,1)$ e $(-1,0,0,1)$.

3) (1.0) Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases ordenadas $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ em que $\mathcal{B}_1 = \{(1,-1),(0,1)\}$. Seja

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$. Determine as coordenadas do vector $(1,1)$ em $\mathcal{B}_2$.

4) (0.5) Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Considere os seguintes subespaços lineares de $\mathcal{P}_2$:

$$V_1 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(-1) = 2p(0) - p(1)\} \qquad \text{e} \qquad V_2 = L(\{-1+t, 1-t^2\}).$$

Determine um base para $V_1 \cap V_2$.

5) (0.5) Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^3 \neq \mathbf{0}$ e $A^4 = \mathbf{0}$. Seja $v \notin \mathcal{N}(A^3)$. Prove que o conjunto

$$\{v, Av, A^2v, A^3v\}$$

é linearmente independente.

Resolução do 2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

1) Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (*).$$

a) Atendendo a (*) $\dim \mathcal{N}(A) = 4 - \dim \mathcal{C}(A) = 4 - \operatorname{car} A = 4 - 1 = 3.$

b) $\{(1,0,0,0)\}$ não é base de $\mathcal{C}(A)$ uma vez que $(1,0,0,0) \notin \mathcal{C}(A)$. Uma base de $\mathcal{C}(A)$ é por exemplo $\{(1,-1,1,-1)\}$ e $(1,0,0,0) \notin L\{(1,-1,1,-1)\}$.

2) a) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x+y+z+w=0\} = \{(-y-z-w,y,z,w) \colon \ y,z,w \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\})$. O conjunto $\{(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ é uma base para U, uma vez que gera U e, é também linearmente independente.

b) Atendendo a que $U = L(\{(1,-1,-1,1),(-1,0,0,1),(-1,1,0,0),(-1,0,1,0)\})$ e

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então $\{(1,-1,-1,1),(-1,0,0,1),(-1,1,0,0)\}$ é uma base para U, uma vez que gera U e, é também linearmente independente.

3) Como 1 e 2 são as coordenadas de $(1,1)$ em $\mathcal{B}_1$ pois $(1,1) = 1(1,-1)+2(0,1)$, e sendo $S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$, então as coordenadas de $(1,1)$ em $\mathcal{B}_2$ são -1 e 2 uma vez que $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4) Como $p(-1) = 2p(0) - p(1) \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 2a_0 - (a_0+a_1+a_2) \Leftrightarrow a_2 = 0$ então
$V_1 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(-1) = 2p(0)-p(1)\} = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_2 = 0\}$. Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_0+a_1 \\ 0 & 0 & a_0+a_1+a_2 \end{array}\right]$$

$a_0+a_1t+a_2t^2 \in V_2 = L(\{-1+t, 1-t^2\}) \Leftrightarrow a_0+a_1+a_2=0$. Logo $V_2 = \{a_0+a_1t+a_2t^2 : a_0+a_1+a_2=0\}$. Pelo que $V_1 \cap V_2 = \{a_0+a_1t+a_2t^2 : a_0+a_1+a_2 = 0 \ \text{ e } \ a_2 = 0\} = \{-a_1 + a_1 t : a_1 \in \mathbb{R}\} = L(\{-1+t\})$. Como $\{-1+t\}$ gera $V_1 \cap V_2$ e, é também linearmente independente, então é uma base para $V_1 \cap V_2$.

5) Sejam $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha v + \beta Av + \gamma A^2 v + \delta A^3 v = \mathbf{0}$. Multiplicando a igualdade anterior por A^3 e atendendo a que $A^4 = \mathbf{0}$ e assim $A^5 = A^6 = A^7 = \mathbf{0}$, então $\alpha A^3 v = \mathbf{0}$ e deste modo $\alpha = 0$ uma vez que $A^3 v \neq \mathbf{0}$ ($v \notin \mathcal{N}(A^3)$). Analogamente: multiplicando a igualdade $\beta Av + \gamma A^2 v + \delta A^3 v = \mathbf{0}$ por A^2 tem-se $\beta = 0$, multiplicando a igualdade $\gamma A^2 v + \delta A^3 v = \mathbf{0}$ por A tem-se $\gamma = 0$ e finalmente de $\delta A^3 v = \mathbf{0}$ obtém-se $\delta = 0$. Logo, o conjunto $\{v, Av, A^2 v, A^3 v\}$ é linearmente independente.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2º Semestre 2010/2011
28 de Maio de 2011
Duração: 90 minutos

3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

1) Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Para cada α real, considere a matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Prove que $(4, 1+\alpha, -4)$ é um vector próprio de A e diga qual é o valor próprio associado.

b) (1.0) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

c) (1.0) Determine uma base para cada espaço próprio de A e identifique os valores de α para os quais A é diagonalizável.

d) (1.0) Determine, se existirem, os valores de α para os quais é possível encontrar uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de A. Justifique.

e) (1.0) Considerando a matriz A para $\alpha = -1$, calcule a distância entre $(1,1,1)$ e $\mathcal{N}(A+I)$.

2) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ de $\mathcal{P}_2$ onde $p_1(t) = 1 + 2t + 3t^2$, $p_2(t) = 2 + 3t$, $p_3(t) = 1$. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por:

$$T(p_1(t)) = p_2(t), \qquad T(p_2(t)) = p_3(t), \qquad T(p_3(t)) = 0.$$

a) (1.0) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T na base $\mathcal{B}$.

b) (1.0) Calcule $T^3(p(t))$, para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_2$.

c) (1.0) Determine uma base para o núcleo de T e uma base para o contradomínio de T.

d) (1.0) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $T(p(t)) = 3 + 3t$.

3) (1.0) Considere o espaço linear $\mathbb{R}^n$ munido com o produto interno usual. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^T A = AA^T$. Prove que o complemento ortogonal do espaço das colunas de A é igual ao núcleo de A, isto é

$$(\mathcal{C}(A))^{\perp} = \mathcal{N}(A).$$

Resolução do 3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

1) a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1+\alpha \\ -4 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 1+\alpha \\ -4 \end{bmatrix},$$

logo $(4, 1+\alpha, -4)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio -1.

b)

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & \alpha \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 4\right) = (3-\lambda)^2(-1-\lambda),$$

logo, os valores próprios de A são: 3 e -1 onde $m_a(3) = 2$ e $m_a(-1) = 1$ são as respectivas multiplicidades algébricas.

c) Espaços próprios de A: $\mathcal{N}(A - (-1)I)$ e $\mathcal{N}(A - 3I)$. Tem-se

$$\mathcal{N}(A - (-1)I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & \alpha \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = L(\{(4, 1+\alpha, -4)\}).$$

O conjunto $\{(4, 1+\alpha, -4)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A - (-1)I)$ pois gera $\mathcal{N}(A - (-1)I)$ e é linearmente independente.

$$\mathcal{N}(A - 3I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \alpha \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} L(\{(0,1,0)\}) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ L(\{(0,1,0),(1,0,1)\}) & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

O conjunto $\{(0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A - 3I)$ se $\alpha \neq 1$. O conjunto $\{(0,1,0),(1,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A - 3I)$ se $\alpha = 1$.

A é diagonalizável se e só se existir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A ($\{(4,2,-4),(0,1,0),(1,0,1)\}$) se e só se $\alpha = 1$.

d) Não há nenhum valor de α para o qual exista uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de A, uma vez que A não é simétrica, isto é, $A \neq A^T$ para todo o α.

e) Para $\alpha = -1$, a distância entre o ponto $(1,1,1)$ e o subespaço $\mathcal{N}(A+I)$ é dada por:

$$d((1,1,1), \mathcal{N}(A+I)) = \left\| P_{(\mathcal{N}(A+I))^\perp}(1,1,1) \right\| = \left\| P_{\mathcal{L}(A+I)}(1,1,1) \right\| \underset{(1,1,1)\in\mathcal{L}(A+I)=L(\{(1,0,1),(0,1,0)\})}{=} \|(1,1,1)\| = \sqrt{3}.$$

2) a) $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ uma vez que $T(p_1(t))=p_2(t)$, $T(p_2(t))=p_3(t)$, $T(p_3(t))=0$ e $\mathcal{B}=\{p_1,p_2,p_3\}$ é uma base ordenada de $\mathcal{P}_2$.

b) Atendendo a que

$$M\left(T^3;\mathcal{B};\mathcal{B}\right)=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

sendo α,β e γ as coordenadas de $p(t)$ em $\mathcal{B}$ então as coordenadas de $T^3(p(t))$ em $\mathcal{B}$ são dadas por:

$$M\left(T^3;\mathcal{B};\mathcal{B}\right)\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Pelo que $T^3(p(t))=\mathbf{0}$, para todo o $p(t)\in\mathcal{P}_2$.

c) Como $\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}))=L(\{(0,0,1)\})$, então

$$\mathcal{N}(T)=L\left(\{0p_1(t)+0p_2(t)+1p_3(t)\}\right)=L\left(\{p_3(t)\}\right)=L\left(\{1\}\right).$$

O conjunto $\{1\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ pois gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente.

Quanto ao contradomínio, como $\mathcal{B}=\{p_1,p_2,p_3\}$ gera $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{I}(T)=L\left(\{T(p_1(t)),T(p_2(t)),T(p_3(t))\}\right)=L\left(\{p_2(t),p_3(t)\}\right)=L\left(\{2+3t,1\}\right).$$

O conjunto $\{2+3t,1\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ pois gera $\mathcal{I}(T)$ e é linearmente independente.

d) Como

$$T(p(t))=3+3t=(2+3t)+1=T(p_1(t))+T(p_2(t))\underset{T\text{ é linear}}{=}T(p_1(t)+p_2(t))=T\left(3+5t+3t^2\right),$$

logo $3+5t+3t^2$ é uma solução particular de $T(p(t))=3+3t$, pelo que a solução geral de

$$T(p(t))=3+3t$$

é dada por:

$$\mathcal{N}(T)+3+5t+3t^2=\alpha+3+5t+3t^2\quad\text{com}\quad\alpha\in\mathbb{R}.$$

3) Usando o produto interno usual, tem-se

$$\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(A^TA)=\mathcal{N}(AA^T)=\left(\mathcal{L}(AA^T)\right)^\perp=\left(\mathcal{C}(AA^T)\right)^\perp=(\mathcal{C}(A))^\perp.$$

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2010/2011
16 de Junho de 2011
Duração: 90 + 90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) (1.0) Determine o número real λ para o qual $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é solução da equação: $Au - \lambda u = \mathbf{0}$.

b) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

c) (1.0) Resolva a equação: $Au = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$.

d) (1.0) Determine todos os vectores b para os quais a equação $Au = b$ tenha sempre solução.

2) (1.0) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A^6 - A^5)$.

3) (1.0) Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X tal que

$$AXB - B = AX \det\left(A^T A\right).$$

4) Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Seja $\mathcal{B} = \{t - t^2, -2 + 2t\}$ uma base ordenada de um subespaço U de $\mathcal{P}_2$.

a) (1.0) Determine as coordenadas do vector $1 - t^2$ na base $\mathcal{B}$.

b) (1.0) Determine a base ordenada $\mathcal{B}_1$ de U de tal modo que a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}$ seja dada por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) (1.0) Sendo $V = L\left(\{-1 + t^2, -2 + t - t^2, 3 - t\}\right)$, determine, justificando, uma base para $U \cap V$.

5) (1.0) Seja A uma matriz real do tipo 5×6. Calcule, justificando, $\det\left(A^T A\right)$.

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1) Considere o espaço linear $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e os seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

$$V = L\big((1,1,0,0),(1,0,1,-1)\big), \qquad W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x - y + 2z + 3w = 0\}.$$

a) (1.0) Determine $u \in V$ e $v \in V^\perp$ tais que $(2,-2,1,-1) = u+v$ e calcule a distância entre $(1,1,1,1)$ e V.

b) (1.0) Encontre uma matriz A tal que $W^\perp = \mathcal{N}(A)$.

c) (1.0) Verifique que $V \subset W$ e determine uma base para $W^\perp \cap V^\perp$.

d) (1.0) Verifique se $V^\perp + W^\perp = \mathbb{R}^4$, justificando.

2) Considere matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere a base ordenada $B = \{(1,0,0),(1,1,0)),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $A = M(T;B;B)$.

a) (1.0) Determine os valores próprios da matriz A.

b) (1.0) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A.

c) (1.0) Verifique se o vector $(1,0,-1)$ é vector próprio da matriz A ou da transformação linear T.

d) (1.0) Resolva, em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x,y,z) = (2,1,1)$.

e) (1.0) Verifique se a aplicação

$$\big\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big\rangle = x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + x_3y_3$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^3$. Justifique.

3) (1.0) Seja A matriz real $n \times n$ nilpotente, isto é, existe um natural k tal que $A^k \neq \mathbf{0}$ e $A^{k+1} = \mathbf{0}$. Prove que A não é diagonalizável.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2010/2011
16 de Junho de 2011
Duração: 90 + 90 minutos

RESOLUÇÃO DO TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAer, MEAmbi, MEEC e MEMec

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1) **a)** $Au - \lambda u = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 4.$

b) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1,0,-1)\})$. $\{(1,0,-1)\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

c) $Au = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Au = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \underset{\text{a) e b)}}{\Leftrightarrow} u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) A equação $Au = b$ tem sempre solução se e só se $b \in \mathcal{C}(A) = L(\{(1,0,1), (0,1,0)\})$

2) $\det(A^6 - A^5) = (\det A)^5 \det(A - I) = \left(\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^5 \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3.$

3) $AXB - B = AX \det(A^T A) \Leftrightarrow AX\left(B - I\underbrace{\det(A^T A)}_{=1}\right) = B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4) **a)** Como $1 - t^2 = t - t^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2 + 2t)$, as coordenadas de $1 - t^2$ na base $\mathcal{B}$ são 1 e $-\frac{1}{2}$.

b) $\mathcal{B}_1 = \left\{1(t - t^2) + 0(-2 + 2t), 1(t - t^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2 + 2t)\right\} = \{t - t^2, 1 - t^2\}$.

c) $V \underset{3-t \in V}{=} L(\{-1 + t^2, -2 + t - t^2\})$. Como $-1 + t^2 \in U$ e $-2 + t - t^2 \notin U$, tem-se $U + V = \mathcal{P}_2$ e assim $\{-1 + t^2\}$ é uma base para $U \cap V$.

5) Sendo $A \in \mathcal{M}_{5\times 6}(\mathbb{R})$, tem-se $A^T A \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$. Como $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^T A)$ e

$$\dim \mathcal{N}(A) = 6 - \operatorname{car} A \geq 6 - 5 = 1$$

então $1 \leq \dim \mathcal{N}(A) \leq \dim \mathcal{N}(A^T A)$. Logo $\dim \mathcal{N}(A^T A) \neq 0$ pelo que $A^T A$ não é invertível, isto é,

$$\det(A^T A) = 0.$$

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1) a) Os vectores $u_1 = (1,1,0,0), u_2 = (1,0,1,-1)$ formam uma base de V. Seja $\{v_1, v_2\}$ a base ortogonal de V que se obtém aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vectores u_1 e u_2. Portanto, $v_1 = u_1 = (1,1,0,0)$ e

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 = (1,0,1,-1) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1).$$

Assim, $u = P_V(2,-2,1,-1) =$

$$\frac{\langle (2,-2,1,-1), v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle (2,-2,1,-1), v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = \frac{0}{2}(1,1,0,0) + \frac{4}{5/2}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1) = \frac{1}{5}(4,-4,8,-8)$$

e $v = P_{V^\perp}(2,-2,1,-1) = (2,-2,1,-1) - P_V(2,-2,1,-1) = \frac{1}{5}(6,-6,-3,3)$. Finalmente

$$d((1,1,1,1), V) = ||P_{V^\perp}(1,1,1,1)|| = ||(1,1,1,1) - P_V(1,1,1,1)|| = ||(0,0,1,1)|| = \sqrt{2}.$$

b) Como $x = y - 2z - 3w$ e $(y-2z-3w, y, z, w) = y(1,1,0,0) + z(-2,0,1,0) + w(-3,0,0,1)$ concluí-se que $W = L((1,1,0,0), (-2,0,1,0), (-3,0,0,1))$. Portanto, $W^\perp = \mathcal{N}(A)$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $(1,1,0,0), (1,0,1,-1) \in W$, pelo que qualquer combinação linear entre eles também pertence a W (porque W é um espaço linear). Portanto $V \subset W$. Assim, $W^\perp \subset V^\perp$, donde $W^\perp \cap V^\perp = W^\perp$. Mais, $\{(1,-1,2,3)\}$ é uma base de $W^\perp$ pois $W^\perp = \mathcal{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

d) Não, pois pela alínea c) podemos concluir que $W^\perp \subset V^\perp$ e portanto $W^\perp + V^\perp = V^\perp \neq \mathbb{R}^4$.

2) a) O polinómio caracterísico de A é

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - 1^2\big) = -\lambda(\lambda-2)^2,$$

donde $\{0,2\}$ é o conjunto dos valores próprios de A com $m_a(0) = 1$ e $m_a(2) = 2$.

b) $\{(1,0,-1)\}$ é uma base para o espaço próprio $E_0 = \mathcal{N}(A)$ e $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ é uma base para o espaço próprio $E_2 = \mathcal{N}(A-2I) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Portanto $\{(1,0,-1),(1,0,1),(0,1,0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores próprios de A.

c) $(1,0,-1)$ é vector próprio da matriz A pela alínea b), mas não é vector próprio da transformação linear T, pois $T(1,0,-1) = (2,2,0)$; note que $T(1,0,-1) =$

$$T\big(1(1,0,0) + 1(1,1,0) - 1(1,1,1)\big) = T(1,0,0) + T(1,1,0) - T(1,1,1) = T(1,1,0) = 2(1,1,0).$$

d) $(1,0,0)$ é uma solução particular de $T(x,y,z) = (1,0,1)$, i.e. $T(1,0,0) = (2,1,1)$. Por outro lado $\{(-1,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$ e portanto $\{(0,1,1)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(T)$, pois $(0,1,1) = -1(1,0,0) + 0(1,1,0) + 1(1,1,1)$. Logo a solução geral da equação linear $T(x,y,z) = (1,0,1)$ é:

$$(1,0,0) + c(0,1,1) = (1,c,c), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

e) Temos $\big\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$. Como os valores próprios de A não são todos positivos, podemos concluir que a aplicação não define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

3) Se λ é valor próprio de A então λ^{k+1} é valor próprio de A^{k+1}, pois $Au = \lambda u$ implica $A^{k+1}u = \lambda^{k+1}u$. Sendo A é nilpotente, então $\lambda^{k+1} = 0$, logo $\lambda = 0$ é o único valor próprio de A.

Se A fosse diagonalizável então existiria uma matriz invertível S tal que $A = S^{-1}DS$ onde D é a matriz diagonal cujas entradas na diagonal são formadas pelos valores próprios de A. Como $\lambda = 0$ é o único valor próprio de A, $D = \mathbf{0}$ e portanto $A = S^{-1}\mathbf{0}S = \mathbf{0}$, o que é absurdo porque $A^k \neq \mathbf{0}$.