Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2010/2011
19 de Outubro de 2010
Duração: 45 minutos

1º TESTE (A) DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: MEAmbi e MEBiol

1) Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 2 & 7 & 2 & 20 \\ 1 & 5 & \alpha & 10 \end{array}\right].$$

a) (1.0) Discuta em termos de α a existência ou não de solução do sistema de equações lineares anterior.

b) (1.0) Para $\alpha = 4$, determine o conjunto solução do sistema de equações lineares correspondente.

2) (1.0) Determine a matriz A tal que $(A^T + 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

3) (1.0) Sejam A e B matrizes 3×3 tais que $\det A = \sqrt{3}$ e $\det B = \frac{1}{2}$. Calcule $\det(2A^T B^{-3})$.

4) (0.5) Calcule $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 & -2 \\ \pi & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

5) (0.5) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ matrizes não nulas. Determine a característica de AB^T. Justifique.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2010/2011
19 de Outubro de 2010
Duração: 45 minutos

Resolução do 1º TESTE (A) DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: MEAmbi e MEBiol

1) a) (1.0) Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 2 & 7 & 2 & 20 \\ 1 & 5 & \alpha & 10 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-4 & 0 \end{array}\right].$$

Se $\alpha \neq 4$ então o sistema é possível e determinado, existindo uma única solução. Se $\alpha = 4$ então o sistema é possível e indeterminado, existindo um nº infinito de soluções.

b) (1.0) Para $\alpha = 4$, tem-se o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 4y + 2z = 10 \\ -y - 2z = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 + 6z \\ y = -2z. \end{cases}$$

Colocando $z = s$, a solução geral do sistema é dada por: $S = \{(10 + 6s, -2s, s) : s \in \mathbb{R}\}$.

2) (1.0)

$$(A^T + 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^T + 4I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \Leftrightarrow A = \left(\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

3) (1.0)

$$\det(2A^TB^{-3}) = 2^3 \det\left(A^T\right)\det(B^{-3}) = 8\det A\frac{1}{(\det B)^3} = 64\sqrt{3}.$$

4) (0.5)

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 & -2 \\ \pi & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \times (-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} = (-2)(-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = 30.$$

5) (0.5) Sendo $A, B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

e assim

$$AB^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Como A e B são matrizes não nulas, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $a_i \neq 0$ e existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $b_j \neq 0$, tendo-se

$$AB^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & \cdots & a_1b_j & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_ib_1 & \cdots & a_ib_j & \cdots & a_ib_n \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & \cdots & a_nb_j & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Aplicando sucessivamente a operação elementar

$$-\frac{a_k}{a_i}L_i + L_k \to L_k$$

para todo o $k = 1, ..., n$ com $k \neq i$, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_ib_1 & \cdots & a_ib_j & \cdots & a_ib_n \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \underset{L_i \leftrightarrow L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} a_ib_1 & \cdots & a_ib_j & \cdots & a_ib_n \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

com $a_ib_j \neq 0$, isto é,

$$\mathrm{car}(AB^T) = 1.$$

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2010/2011
3 de Dezembro de 2010
Duração: 45 minutos

2º TESTE (A) DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: MEAmbi e MEBiol

1) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

($\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{L}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ são respectivamente, o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas de A.)

a) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

b) (1.0) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua duas colunas de A.

c) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A)$.

2) (1.0) Determine as coordenadas de $p(t) = t$ na base ordenada $\{2-t, 2+t\}$ de $\mathcal{P}_1$.
($\mathcal{P}_1$ é o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1.)

3) (1.0) Seja $B = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ c & d & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Calcule a, b, c, d tais que $\dim \mathcal{N}(B) = 2$ e $(1,0,2) \in \mathcal{L}(B)$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2010/2011
3 de Dezembro de 2010
Duração: 45 minutos

Resolução do 2º TESTE (A) DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: MEAmbi e MEBiol

1) a) (1.0) Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) $\mathcal{N}(A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+z=0 \text{ e } y-z=0\} = \{(-z,z,z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1,1)\})$. Logo $\{(-1,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$ uma vez que gera $\mathcal{N}(A)$ e é linearmente independente.

b) (1.0) $\mathcal{C}(A) = L(\{(1,0,1),(0,1,1)\})$. Logo, sendo o conjunto $S = \{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}(\subset \mathbb{R}^3)$ linearmente independente e tendo em conta que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ então S é uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclui duas colunas de A.

c) (1.0) $\mathcal{L}(A) = L(\{(1,0,1),(0,1,-1)\})$. Uma vez que $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$ e $\{(1,0,1),(0,1,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$ então $\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = \operatorname{car} A = 2$. Atendendo a que $(1,0,1) \in \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A)$ e $(0,1,-1) \notin \mathcal{C}(A)$ (uma vez que o "sistema"

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

é impossível) então $\{(1,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A) = 1$.

2) (1.0) Como $\mathcal{B} = \{2-t, 2+t\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1$, existem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $p(t) = t = \alpha(2-t) + \beta(2+t)$ sendo α e β as coordenadas de $p(t)$ nessa base ordenada. Atendendo a que

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

$2\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{2}$ e $2\alpha + 2\beta = 0 \underset{\beta=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \alpha = -\frac{1}{2}$. Logo $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ são as coordenadas de $p(t)$ em $\mathcal{B}$.

3) (1.0) Seja $B = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ c & d & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\dim \mathcal{N}(B) = 2$ e $(1,0,2) \in \mathcal{L}(B)$. Como $\operatorname{car} B = \dim \mathcal{L}(B) = 3 - \dim \mathcal{N}(B) = 1$ então $\mathcal{L}(B) = L(\{(c,d,4)\}) = L(\{(4,a,b)\}) = L(\{(1,0,2)\})$, pelo que $a = d = 0$, $b = 8$ e $c = 2$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2010/2011
8 de Janeiro de 2011
Duração: 90 minutos

3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

1) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A.

a) (1.0) Determine os valores próprios de A e diga, justificando, se A é invertível.

b) (1.0) Determine, caso exista, uma base para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A.

c) (1.0) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $(\mathcal{C}(A))^\perp$ (complemento ortogonal de $\mathcal{C}(A)$).

d) (1.0) Calcule a distância entre $(1,1,0)$ e $\mathcal{L}(A)$.

e) (1.0) Determine uma matriz B tal que $(\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{N}(B)$ (o complemento ortogonal de $\mathcal{N}(A)$ é igual ao núcleo de B).

2) Seja $\mathcal{P}_n$, com $n \in \mathbb{N}$, o espaço linear real dos polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a n. Considere a transformação linear $T_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{B}_2 = \{1+t, 1+2t\}$ de $\mathcal{P}_1$, é dada pela matriz:

$$M(T_1; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ tal que

$$T_2(1) = 1 - t \qquad T_2(t) = 2 + 8t - 2t^2.$$

a) (1.0) Determine a matriz $M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_1)$ que representa T_2 em relação às bases ordenadas $\mathcal{B} = \{1, t\}$ de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

b) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(T_1)$ (núcleo de T_1) e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

c) (1.0) Determine $T_1(t)$ e encontre, em $\mathcal{P}_2$, a solução geral da equação $T_1(p(t)) = t$.

d) (1.0) Verifique se 1 é o único valor próprio de $T_1 \circ T_2$.

3) (1.0) Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma transformação linear. Mostre que existe um e um só $u_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(u) = \langle u, u_0 \rangle$, para todo o $u \in \mathbb{R}^n$.

Resolução do 3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (8 de Janeiro de 2011)
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

1) a) $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]=(1-\lambda)\,\lambda\,(2-\lambda)$. Logo, os valores próprios de A são 1, 0 e 2. Como 0 é valor próprio de A então A não é invertível.

b) Como A tem 3 valores próprios distintos, qualquer conjunto de 3 vectores próprios associados respectivamente a cada um desses valores próprios, será linearmente independente, pelo que existirá uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Uma tal base poderá ser $\{(0,1,0),(-1,0,1),(1,2,1)\}$ uma vez que os subespaços próprios associados aos valores próprios 1, 0 e 2 são respectivamente dados por:

$$\mathcal{N}(A-I)=L(\{(0,1,0)\}),\ \mathcal{N}(A)=L(\{(-1,0,1)\}),\ \mathcal{N}(A-2I)=L(\{(1,2,1)\}).$$

c) $(1,0,1)=(1,1,1)-(0,1,0)$ então $(1,0,1),(0,1,0)\in\mathcal{C}(A)$. Além disso $\langle(1,0,1),(0,1,0)\rangle=0$. Por outro lado, como $(\mathcal{C}(A))^{\perp}=\left(\mathcal{L}(A^T)\right)^{\perp}=\mathcal{N}(A^T)=L(\{(-1,0,1)\})$ e $\mathbb{R}^3=\mathcal{C}(A)\oplus(\mathcal{C}(A))^{\perp}$ uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $(\mathcal{C}(A))^{\perp}$ poderá ser: $\{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)\}$.

d) A distância d entre $(1,1,0)$ e $\mathcal{L}(A)$ é dada por: $d((1,1,0),\mathcal{L}(A))=\left\|P_{(\mathcal{L}(A))^{\perp}}(1,1,0)\right\|=$ $=\left\|P_{\mathcal{N}(A)}(1,1,0)\right\|=\left\|\operatorname{proj}_{(-1,0,1)}(1,1,0)\right\|=\left\|\frac{\langle(1,1,0),(-1,0,1)\rangle}{\|(-1,0,1)\|^2}(-1,0,1)\right\|=\left\|\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)\right\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e) Como $(\mathcal{N}(A))^{\perp}=\mathcal{N}(B)\Leftrightarrow\mathcal{N}(A)=(\mathcal{N}(B))^{\perp}=\mathcal{L}(B)$ e $\mathcal{N}(A)=L(\{(-1,0,1)\})$ logo poderá ter-se $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

2) **a)** $T_2(1)=1-t=0\,(1+t)+1\,(1-t)+0t^2$, $T_2(t)=2+8t-2t^2=5\,(1+t)-3\,(1-t)-2t^2$, logo $M(T_2;\mathcal{B};\mathcal{B}_1)=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 1 & -3\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

b) $\mathcal{N}(M(T_1;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2))=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\right)=\{(-2y,y,y):y\in\mathbb{R}\}$. Logo $\mathcal{N}(T_1)=$ $\{-2y\,(1+t)+y\,(1-t)+yt^2:y\in\mathbb{R}\}=\{y\,(-1-3t+t^2):y\in\mathbb{R}\}=L(\{-1-3t+t^2\})$. Base para $\mathcal{N}(T_1)$: $\{-1-3t+t^2\}$. T_1 é sobrejectiva: $\dim\mathcal{I}(T_1)=\dim\mathcal{P}_2-\dim\mathcal{N}(T_1)=2=\dim\mathcal{P}_1$.

c) $T_1(t)=\frac{1}{2}\left[T_1(1+t)-T_1(1-t)\right]=\frac{1}{2}\left[1\,(1+t)+0\,(1+2t)-2\,(1+t)+1\,(1+2t)\right]=\frac{1}{2}t\Leftrightarrow$ $T_1(2t)=t$ (uma vez que T_1 é linear), logo a solução geral da equação $T_1(p(t))=t$ é: $\{2t\}+\mathcal{N}(T_1)=$ $\{2t+c\,(-1-3t+t^2):c\in\mathbb{R}\}$.

d) $\{1,t\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1$. Como $(T_1\circ T_2)(1)=T_1(T_2(1))=T_1(1-t)=2\,(1+t)-1\,(1+2t)=1$ e $(T_1\circ T_2)(t)=T_1(T_2(t))=T_1(2+8t-2t^2)=5T_1(1+t)-3T_1(1-t)-2T_1t^2=$ $5\,[1\,(1+t)+0\,(1+2t)]-3\,[2\,(1+t)-(1+2t)]-2\,[0\,(1+t)+1\,(1+2t)]=t$, então $T_1\circ T_2=I$, ou seja, 1 é o único valor próprio de $T_1\circ T_2$.

3) **Existência.** $\mathbb{R}^n=\mathcal{N}(T)\oplus(\mathcal{N}(T))^{\perp}$. Se $\mathcal{N}(T)=\mathbb{R}^n$ então $u_0=\mathbf{0}$. Se $\mathcal{N}(T)\neq\mathbb{R}^n$ então existe $v_0\in(\mathcal{N}(T))^{\perp}\setminus\{\mathbf{0}\}$. Seja $u\in\mathbb{R}^n$ arbitrário. Logo $T(u)v_0-T(v_0)u\in\mathcal{N}(T)$ (pois $T\Big(T(u)v_0-T(v_0)u\Big)=T(u)T(v_0)-T(v_0)T(u)=0$). Deste modo $\langle T(u)v_0-T(v_0)u,v_0\rangle=0$ o que é equivalente a $T(u)=\langle u,\frac{T(v_0)}{\langle v_0,v_0\rangle}\,v_0\rangle$. Assim existe $u_0:=\frac{T(v_0)}{\langle v_0,v_0\rangle}\,v_0\in\mathbb{R}^n$ tal que $T(u)=\langle u,u_0\rangle$, para todo o $u\in\mathbb{R}^n$.

Unicidade. Suponhamos que existem $u_0,u_1\in\mathbb{R}^n$ tais que $\langle u,u_0\rangle=T(u)=\langle u,u_1\rangle$, para todo o $u\in\mathbb{R}^n$. Assim $\langle u,u_0-u_1\rangle=0$, para todo o $u\in\mathbb{R}^n$, isto é $u_0-u_1\in(\mathbb{R}^n)^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$, ou seja $u_0=u_1$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Ano Lectivo 2010/2011
25 de Janeiro de 2011
Duração: 90 + 90 minutos

TESTE DE RECUPERAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

I (T1+T2 - 10 valores - 90 minutos)

1) Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sejam $\mathcal{C}(A_\alpha)$, $\mathcal{L}(A_\alpha)$ e $\mathcal{N}(A_\alpha)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A_α. Sejam A_0, A_{-1} e A_1 as matrizes que se obtêm de A_α fazendo respectivamente $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ e $\alpha = 1$.

a) (1.0) Determine a característica de A_α em função do parâmetro α.

b) (1.0) Diga, justificando, quais são os valores de α para os quais A_α é invertível.

c) (1.0) Seja $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\det\left((A_0)^n + (A_0)^{n+2}\right)$.

d) (1.0) Considerando os valores de α para os quais A_α é invertível, calcule a entrada $(3,1)$ da matriz inversa de A_α.

e) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$.

f) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$ e calcule as coordenadas de $(0,0,0,1)$ nessa base.

g) (1.0) Determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_0 u = b$, onde b é igual à 1^a coluna da matriz A_0.

h) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$.

i) (1.0) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_{-1}) \cap \mathcal{C}(A_{-1})$.

2) (1.0) Sejam B e C matrizes $m \times n$. Mostre que

$$|\operatorname{car} B - \operatorname{car} C| \leq \operatorname{car}(B - C).$$

II (T3 - 10 valores - 90 minutos)

1) Para cada parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$, sejam

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Prove que u_1 e u_2 são vectores próprios de A. Determine os valores próprios associados.

b) (1.0) Determine os valores próprios de A e indique os valores de α para os quais A tem 3 valores próprios todos distintos.

c) (1.0) Determine, em função de α, bases para os espaços próprios associados.

d) (1.0) Identifique, justificando, os valores de α para os quais a matriz A é diagonalizável.

2) Considere o espaço linear $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual. Seja V o subespaço linear gerado pelos vectores $v_1 = (1, 0, 0, -1)$ e $v_2 = (0, 1, -1, 0)$. Considere ainda a transformação linear $T : V \to V$ tal que

$$T(v_1) = v_2, \qquad T(v_2) = -v_1.$$

a) (1.0) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de V.

b) (1.0) Encontre, em V, a solução geral da equação $T(u) = (2, -3, 3, -2)$.

c) (1.0) Determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal $V^\perp$ de V em $\mathbb{R}^4$.

d) (1.0) Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, seja $p = (a, b, 2-b, 2-a)$. Calcule a distância entre p e V.

e) (1.0) Sejam $w_1 = (0, 0, 1, 1)$, $w_2 = (0, 0, 0, 1)$ e considere a transformação linear $R : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$R(v_1) = v_2, \qquad R(v_2) = -v_1, \qquad R(w_1) = R(w_2) = (0, 0, 0, 0).$$

Encontre, em $\mathbb{R}^4$, a solução geral da equação $R(u) = (2, -3, 3, -2)$.

3) (1.0) Seja $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a projecção ortogonal sobre um subespaço V de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k. Determine o polinómio característico de P e prove que P é diagonalizável.

Resolução do 3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (25 de Janeiro de 2011)
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

I – T1+T2

1) a) $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \underset{\substack{\alpha L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \alpha^2-1 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$. $\operatorname{car} A_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 1 \\ 3 & \text{se } \alpha = -1 \\ 4 & \text{se } \alpha \neq 1 \text{ e } \alpha \neq -1. \end{cases}$

b) A_α é 4×4. Logo A_α é invertível se e só se $\operatorname{car} A_\alpha = 4$. Assim, A_α é invertível se e só se $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

c) $\det\left((A_0)^n + (A_0)^{n+2}\right) = \det\left[(A_0)^n\left(I + (A_0)^2\right)\right] = \underbrace{(\det A_0)^n}_{=1}\det\left(I + (A_0)^2\right) = \det\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 20.$

d) $\left((A_\alpha)^{-1}\right)_{(3,1)} = \dfrac{1}{\det A_\alpha}\left(\operatorname{cof} A_\alpha\right)_{(1,3)} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2(1+\alpha)}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & -\alpha \end{vmatrix} = \dfrac{1-\alpha^2}{(1-\alpha)^2(1+\alpha)} = \dfrac{1}{1-\alpha}.$

e) $\mathcal{N}(A_{-1}) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1,-1,0,0)\}\right)$. $\{(1,-1,0,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$.

f) Por a), $\mathcal{B} = \{(-1,-1,0,-1),(0,1,1,0),(-1,0,1,1)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{C}(A_{-1})$, pelo que $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$. Como $(0,0,0,1) = -\frac{1}{2}(-1,-1,0,-1) - \frac{1}{2}(0,1,1,0) + \frac{1}{2}(-1,0,1,1)$ então $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ são as coordenadas de $(0,0,0,1)$ na base ordenada $\mathcal{B}$.

g) $A_0 u = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{solução particular de } A_0u=b} + v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, com $v \in \mathcal{N}(A_0) \underset{A_0 \text{ é invertível}}{=} \{0\}$. Solução geral de $A_0 u = b$: $\{(1,0,0,0)\}$.

h) Por a), $\{(-1,1,0,-1),(0,0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A_1)$ e $\{(-1,1,0,-1),(0,-1,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A_1)$. Como $\mathcal{B}' = \{(-1,1,0,-1),(0,-1,1,0),(0,0,1,1)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$ então $\mathcal{B}'$ é uma base de $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$.

i) Por a) e f), $\{(-1,-1,0,-1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A_{-1})$ e $\{(-1,-1,0,-1),(0,1,1,0),(-1,0,1,1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A_{-1})$. Como por f) $(0,0,0,1) \in \mathcal{C}(A_{-1})$, e $(0,0,1,1) \notin \mathcal{C}(A_{-1})$ então $\{(-1,-1,0,-1),(0,0,0,1)\}$ é uma base $\mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{C}(A_1)$.

2) Como $B = C + B - C$ e $\mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(C + B - C) \subset \mathcal{C}(C) + \mathcal{C}(B - C)$ então $\operatorname{car} B = \dim \mathcal{C}(B) \leq \dim \mathcal{C}(C) + \dim \mathcal{C}(B - C) = \operatorname{car} C + \operatorname{car}(B - C)$. Pelo que $\operatorname{car} B - \operatorname{car} C \leq \operatorname{car}(B - C)$. De um modo análogo, como $C = B + [-(B - C)]$ e $\mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(B + [-(B - C)]) \subset \mathcal{C}(B) + \mathcal{C}(B - C)$ então $\operatorname{car} C - \operatorname{car} B \leq \operatorname{car}(B - C)$. Logo $|\operatorname{car} B - \operatorname{car} C| \leq \operatorname{car}(B - C)$.

II – T3

1) a) Como $Au_1 = (\alpha+1)u_1$ e $Au_2 = (\alpha-1)u_2$ então u_1, u_2 são vectores próprios de A, associados respectivamente aos valores próprios $\alpha+1$ e $\alpha-1$.

b) $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)\left[(\alpha-\lambda)^2 - 1\right] = (3-\lambda)(\lambda-\alpha-1)(\lambda-\alpha+1)$. Para $(\alpha+1 \neq 3$ e $\alpha - 1 \neq 3) \Leftrightarrow \alpha \notin \{2,4\}$ os valores próprios de A: $3, \alpha+1$ e $\alpha-1$ são todos distintos.

c) Para $\alpha \notin \{2,4\}$, $\{u_1\}$, $\{u_2\}$ e $\{(3-\alpha, \alpha^2-6\alpha+8, 1)\}$ são bases de $E_{\alpha+1}$, $E_{\alpha-1}$ e E_3, respectivamente.
Para $\alpha = 2$, $E_3 = E_{\alpha+1}$. Além disso, $\{u_2\}$ é uma base de $E_{\alpha-1}$ e $\{u_1\}$ é uma base de E_3.
Para $\alpha = 4$, $E_3 = E_{\alpha-1}$. Além disso, $\{u_2\}$ é uma base de E_3 e $\{u_1\}$ é uma base de $E_{\alpha+1}$.

d) Para $\alpha \notin \{2,4\}$ a matriz A é diagonalizável, pois os seus valores próprios são todos distintos. Se $\alpha = 2$ ou $\alpha = 4$ então 3 é valor próprio de A e $m_g(3) = 1 < 2 = m_a(3)$, pelo que A não é diagonalizável. Logo A é diagonalizável $\Leftrightarrow \alpha \notin \{2,4\}$.

2) a) $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Como $\det M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) \neq 0$ então T é invertível e $T(u) = (2,-3,3,-2) \Leftrightarrow u = T^{-1}(2,-3,3,-2)$.
Como $M(T^{-1};\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então atendendo a que as coordenadas de $(2,-3,3,-2)$ em $\mathcal{B}$ são 2 e -3 pois $(2,-3,3,-2) = 2v_1 - 3v_2$, tem-se que $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ são as coordenadas de u na base $\mathcal{B}$. Logo $T(u) = (2,-3,3,-2) \Leftrightarrow u = -3v_1 - 2v_2 = (-3,-2,2,3)$, ou seja $u = (-3,-2,2,3)$ é a única solução da equação linear $T(u) = (2,-3,3,-2)$.

c) Como $V^\perp = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = L(\{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\})$ então $\{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}$ é uma base de $V^\perp$. Como $\langle(0,1,1,0),(1,0,0,1)\rangle = 0$ então $\{(0,1,1,0),(1,0,0,1)\}$ é uma base ortogonal de $V^\perp$.

d) $d(p,V) = ||P_{V^\perp}(p)|| = \left\| \frac{\langle(a,b,2-b,2-a),(0,1,1,0)\rangle}{\langle(0,1,1,0),(0,1,1,0)\rangle}(0,1,1,0) + \frac{\langle(a,b,2-b,2-a),(1,0,0,1)\rangle}{\langle(1,0,0,1),(1,0,0,1)\rangle}(1,0,0,1) \right\| = ||(1,1,1,1)|| = 2.$

e) Como $R(1,0,0,0) = R(v_1) + R(w_2) = v_2 = (0,1,-1,0)$, $R(0,1,0,0) = R(v_2) + R(w_1) - R(w_2) = v_1 = (1,0,0,-1)$, $R(0,0,1,0) = R(w_1) - R(w_2) = (0,0,0,0)$ e $R(0,0,0,1) = R(w_2) = (0,0,0,0)$ então, sendo $\mathcal{B}_c$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$, $M(R;\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ pelo que $R(u) = (2,-3,3,-2) \Leftrightarrow$ $M(R;\mathcal{B}_c,\mathcal{B}_c)u = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow u \in \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : -b = 2,\ a = -3,\ c,d \in \mathbb{R}\} = \{(-3,-2,c,d) : c,d \in \mathbb{R}\}$. Isto é, a solução geral de $R(u) = (2,-3,3,-2)$ é: $\{(-3,-2,c,d) :\ c,d \in \mathbb{R}\}$.

3) Os casos $k = 0$ ou $k = n$ são triviais, pelo que vamos supôr que $1 \leq k \leq n-1$. Sejam $\{v_1, ...v_k\}$ uma base ortogonal de V e $\{w_1, ..., w_{n-k}\}$ uma base ortogonal de $V^\perp$ de modo a que $\mathcal{B} = \{v_1, ...v_k, w_1, ..., w_{n-k}\}$ seja uma base ortogonal ordenada de $\mathbb{R}^n$. A matriz que representa P em relação a $\mathcal{B}$ é a matriz diagonal com as primeiras k entradas da diagonal principal iguais a 1 e as restantes iguais a zero (note que $P(v_i) = v_i$ e $P(w_j) = 0$ para todos os $i \in \{1, ..., k\}$, $j \in \{1, ..., n-k\}$). Logo P é diagonalizável e o polinómio característico é dado por: $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda-1)^k\lambda^{n-k}$.