Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Ano Lectivo 2009/2010
14 de Novembro de 2009
Duração: 1h e 30 min.

1º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

Atenção: apresente os cálculos em todas as respostas. Caso as respostas às questões 3c, 4, 5 e 6a não estejam correctas as respectivas classificações serão zero.

1) (1.0) Discuta em termos do parâmetro real α a existência ou não de solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} -x+y \ +\alpha z \ =1 \\ 2x+\alpha y-2\alpha z \ =\alpha \\ -\alpha x+\alpha y \ +z=-1+2\alpha \end{cases}$ nas variáveis x, y e z. Nos casos em que existirem soluções, determine-as.

2) (1.0) Seja $S=\{(1-s, s-t, 2s, t-1) : s, t \in \mathbb{R}\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^4$. Determine um sistema de duas equações lineares cujo conjunto de soluções seja S e indique uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclua dois vectores de S.

3) Seja $A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 2 \\ 2 & \beta & \beta^2 & 4 \\ -4 & 0 & -\beta^3 & -8 \\ \beta & 0 & \beta^2 & \beta^2 \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}$.

a) (1.0) Determine a característica e a nulidade de A_β em função do parâmetro β e diga, justificando, quais são os valores de β para os quais A_β é invertível.

b) (1.0) Para $\beta=2$, determine uma base para o espaço das colunas e uma base para o núcleo de A_2.

c) (1.0) Para $\beta=1$, determine a inversa da matriz A_1.

4) (1.0) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ tais que $\det A=2$ e $\det B=-1$. Calcule $\det[-A^T(2B)^{-1}]$.

5) (1.0) Considere a matriz $H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **Sem inverter** a matriz H, calcule $(H^{-1})_{(1,4)}$, isto é, calcule a entrada $(1,4)$ da matriz inversa de H.

6) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e considere os seguintes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$F_\alpha = \{(1,0,-1,0), (0,1,1,1), (1,0,0,-2), (0,0,-1,\alpha)\}, \quad G=\{(1,1,1,1), (1,2,0,-1), (0,0,1,1)\}.$$

a) (1.0) Para $\alpha=3$, calcule as coordenadas do vector $(1,1,1,1)$ em relação à base ordenada F_3.

b) (1.0) Para $\alpha=2$, seja U o subespaço gerado por F_2 e seja V o subespaço gerado por G. Determine uma base para $U+V$ e uma base para $U\cap V$, indicando as respectivas dimensões.

7) (1.0) Considere os seguintes r vectores de $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{x}^1=(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $\mathbf{x}^2=(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots,$ $\mathbf{x}^r=(x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn})$. Mostre que se $|x_{jj}| > \sum_{i=1 (i\neq j)}^{r} |x_{ij}|$ para todo o $j=1,\ldots,r$ então o conjunto $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^r\}$ é linearmente independente.

Sugestão: Considere $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)=\alpha_1\mathbf{x}^1+\alpha_2\mathbf{x}^2+\cdots+\alpha_r\mathbf{x}^r$, com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ e mostre que se existir $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1,\ldots,r\}$) tal que $|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|$, para todo o $i=1,\ldots,r$, então $v_j \neq 0$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Ano Lectivo 2009/2010
14 de Novembro de 2009
Duração: 1h e 30 min.

Resolução do 1º TESTE (A) DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

1) $\begin{cases} -x+y \ +\alpha z \ =1 \\ 2x+\alpha y-2\alpha z \ =\alpha \\ -\alpha x+\alpha y \ +z=-1+2\alpha \end{cases}$ Sejam $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & -2\alpha \\ -\alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ -1+2\alpha \end{bmatrix}$.

$$[A_\alpha \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \alpha & 1 \\ 2 & \alpha & -2\alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha & 1 & -1+2\alpha \end{array}\right] \underset{\substack{2L_1+L_2\to L_2 \\ -\alpha L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha+2 & 0 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)(1+\alpha) & -1+\alpha \end{array}\right].$$

Se $\alpha = 1$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B] = 2 < 3 =$ nº de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$\begin{cases} -x+y+z=1 \\ 3y=3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=1. \end{cases}$$

A solução geral deste sistema é então dada por

$$S_1 = \{(s,1,s) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\alpha = -2$ então então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B] = 2 < 3 =$ nº de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$\begin{cases} -x+y-2z=1 \\ -3z=-3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y-3 \\ z=1. \end{cases}$$

A solução geral deste sistema é então dada por

$$S_{-2} = \{(s-3,s,1) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\alpha = -1$ então $\underbrace{\operatorname{car} A_\alpha}_{=2} < \underbrace{\operatorname{car}[A_\alpha \mid B]}_{=3}$. Logo, o sistema não tem solução (é impossível).

$$S_{-1} = \varnothing.$$

Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$ e $\alpha \neq -2$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B] = 3 =$ nº de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e determinado, tendo-se

$$\begin{cases} -x+y+\alpha z=1 \\ (\alpha+2)\,y=\alpha+2 \\ (1-\alpha)(1+\alpha)\,z=-1+\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\alpha/(\alpha+1) \\ y=1 \\ z=-1/(\alpha+1). \end{cases}$$

A solução geral do sistema é então dada por

$$S_\alpha = \left\{\left(-\frac{\alpha}{\alpha+1}, 1, -\frac{1}{\alpha+1}\right)\right\}.$$

2) Seja $S = \{(1-s, s-t, 2s, t-1) : s,t \in \mathbb{R}\}$.

Sejam $x = 1-s$, $\quad y = s-t$, $\; z = 2s$, $\quad w = t-1$. Uma vez que $s = 1-x \quad$ e $\quad t = w+1$, tem-se então o seguinte sistema linear não homogéneo

$$\begin{cases} y = 1 - x - (w+1) \\ z = 2(1-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + w = 0 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

Fazendo ($s = 0$ e $t = 0$) e ($s = 1$ e $t = 0$), obtêm-se respectivamente os vectores

$$(1,0,0,-1), (0,1,2,-1) \in S \subset \mathbb{R}^4.$$

Uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua 2 vectores de S, pode ser então:

$$\{(1,0,0,-1), (0,1,2,-1), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

uma vez que 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes, formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

3) a) Tem-se

$$A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 2 \\ 2 & \beta & \beta^2 & 4 \\ -4 & 0 & -\beta^3 & -8 \\ \beta & 0 & \beta^2 & \beta^2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ 4L_1+L_3 \to L_3 \\ -\beta L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \beta & \beta(\beta-2) & 0 \\ 0 & 0 & (2-\beta)(2+\beta)\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(\beta-2) \end{bmatrix}.$$

Logo, como $\operatorname{car} A_\beta + \operatorname{nul} A_\beta = 4$,
se $\beta = 0$ então $\operatorname{car} A_\beta = 1$ e $\operatorname{nul} A_\beta = 3$;
se $\beta = 2$ então $\operatorname{car} A_\beta = 2$ e $\operatorname{nul} A_\beta = 2$;
se $\beta = -2$ então $\operatorname{car} A_\beta = 3$ e $\operatorname{nul} A_\beta = 1$;
se $\beta \neq 0$ e $\beta \neq 2$ e $\beta \neq -2$ então $\operatorname{car} A_\alpha = 4$ e $\operatorname{nul} A_\alpha = 0$.

Assim, A_β é invertível se e só se $\beta \in \mathbb{R} \backslash \{-2,0,2\}$, uma vez que é só nestes casos que $\operatorname{car} A_\beta =$ n^o de colunas de A_β.

b)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & -8 & -8 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ 4L_1+L_3 \to L_3 \\ -2L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_2'.$$

As colunas da matriz A_2 correspondentes às colunas da matriz A_2' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A_2) = L(\{(1,2,-4,2), (0,2,0,0)\})$$

e o conjunto $\{(1,2,-4,2), (0,2,0,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A_2)$ e

$$\operatorname{car} A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 2.$$

Uma base para $\mathcal{N}(A_2)$:

$$\mathcal{N}(A_2) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : A_2 u = \mathbf{0}\right\} = \mathcal{N}(A_2').$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2u_3 + 2u_4 = 0 \\ 2u_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2u_3 - 2u_4 \\ u_2 = 0 \end{cases}$$

então

$$\mathcal{N}(A_2) = \mathcal{N}(A_2') = \{(-2u_3 - 2u_4, 0, u_3, u_4) : u_3, u_4 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{(-2u_3, 0, u_3, 0) + (-2u_4, 0, 0, u_4) : u_3, u_4 \in \mathbb{R}\} = \{u_3(-2,0,1,0) + u_4(-2,0,0,1) : u_3, u_4 \in \mathbb{R}\} =$$
$$\mathcal{N}(A_2) = L\left(\{(-2,0,1,0), (-2,0,0,1)\}\right).$$

O conjunto $\{(-2,0,1,0),(-2,0,0,1)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A_2)$, logo é uma base de $\mathcal{N}(A_2)$ e:

$$\operatorname{nul}(A_2) = \dim \mathcal{N}(A_2) = 2.$$

c) $[\ A_1 \mid I\ ] =$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ 4L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{2L_4+L_1\to L_1 \\ -\frac{1}{3}L_3+L_1\to L_1 \\ \frac{1}{3}L_3+L_2\to L_2}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{2L_4+L_1\to L_1 \\ -\frac{1}{3}L_3+L_1\to L_1 \\ \frac{1}{3}L_3+L_2\to L_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_4\to L_4 \\ \frac{1}{3}L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Logo

$$(A_1)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4)) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 2$ e $\det B = -1$.

$$\det[-A^T(2B)^{-1}] = (-1)^3 \det\left(A^T\right) \frac{1}{\det(2B)} = -\det A \frac{1}{2^3 \det B} = \frac{1}{4}.$$

5)

$$\det H = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(4-1) = -3.$$

Logo,

$$\left(H^{-1}\right)_{(1,4)} = \frac{1}{\det H}\left(\left(\operatorname{cof} H\right)^T\right)_{(1,4)} = \frac{1}{\det H}\left(\operatorname{cof} H\right)_{(4,1)} = \frac{1}{-3}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}.$$

6) a) Determinemos as coordenadas do vector $(1,1,1,1)$ em relação à base ordenada

$$F_3 = \{(1,0,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-2),(0,0,-1,3)\}.$$

Existem escalares $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,1,1,1) = \alpha(1,0,-1,0) + \beta(0,1,1,1) + \gamma(1,0,0,-2) + \delta(0,0,-1,3)$$

Como

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{2L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{2L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{L_4+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{-L_3+L_1\to L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

então

$$(1,1,1,1) = (-2)(1,0,-1,0) + 1(0,1,1,1) + 3(1,0,0,-2) + 2(0,0,-1,3)$$

isto é, as coordenadas do vector $(1,1,1,1)$ em relação à base ordenada F_3 são: $-2,1,3$ e 2.

b) Em $\mathbb{R}^4$, sejam

$$U = L\left(\{(1,0,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-2),(0,0,-1,2)\}\right), \quad V = L\left(\{(1,1,1,1),(1,2,0,-1),(0,0,1,1)\}\right).$$

Determinemos uma base para $U+V$, uma base para $U\cap V$ e as respectivas dimensões.

Atendendo a que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_3\to L_3 \\ -\frac{1}{2}L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \underset{2L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} = A' \quad (*).$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(1,0,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-2),(1,1,1,1)\}$$

é uma base de $U+V$, tendo-se $\dim(U+V)=4$ e assim $U+V=\mathbb{R}^4$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\{(1,0,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-2)\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U=3$, e como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3 \\ -2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_2+L_3\to L_3 \\ 7L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underset{-3L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\{(1,1,1,1),(1,2,0,-1),(0,0,1,1)\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V=3$.

Logo,

$$\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=3+3-4=2.$$

Uma base para $U\cap V$.

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ -1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & -2 & x_4 \end{array}\right] \underset{L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1+x_3 \\ 0 & 1 & -2 & x_4 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_3-x_2 \\ 0 & 0 & -2 & x_4-x_2 \end{array}\right] \underset{2L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_3-x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1-3x_2+2x_3+x_4 \end{array}\right]$$

tem-se

$$U=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4: 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=0\right\}$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 2 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & 1 & x_4 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_3-x_1 \\ 0 & -2 & 1 & x_4-x_1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2-2x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2x_2-3x_1+x_4 \end{array}\right] \underset{-L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_2-2x_1+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-x_1-x_3+x_4 \end{array}\right]$$

tem-se

$$V = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

Logo

$$\begin{aligned} U \cap V &= \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \text{ e } -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\right\} = \\ &= \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 = 3x_4 \text{ e } x_1 = -x_3 + 4x_4\right\} = \\ &= \{(-x_3 + 4x_4, 3x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4) \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(-1,0,1,0), (4,3,0,1)\}\right) \end{aligned}$$

Como o conjunto

$$\{(-1,0,1,0), (4,3,0,1)\}$$

gera $U \cap V$ e é linearmente independente, então é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim(U \cap V) = 2$.

7) Considere os seguintes r vectores de $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{x^1} = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $\mathbf{x^2} = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots,$ $\mathbf{x^r} = (x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn})$. Mostre que se $|x_{jj}| > \sum\limits_{i=1(i\neq j)}^{r} |x_{ij}|$ para todo o $j = 1, \ldots, r$ então o conjunto $\{\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, \ldots, \mathbf{x^r}\}$ é linearmente independente.

Sugestão: Considere $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) = \alpha_1\mathbf{x^1} + \alpha_2\mathbf{x^2} + \cdots + \alpha_r\mathbf{x^r}$, com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ e mostre que se existir $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) tal que $|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|$, para todo o $i = 1, \ldots, r$, então $v_j \neq 0$.

Resolução: Seja $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) = \alpha_1\mathbf{x^1} + \alpha_2\mathbf{x^2} + \cdots + \alpha_r\mathbf{x^r}$, com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$.

Suponhamos que existe $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) tal que $|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|$, para todo o $i = 1, \ldots, r$. Queremos mostrar que $v_j \neq 0$.

Suponhamos então (com vista a uma contradição) que $v_j = 0$. Nesse caso, teríamos

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_{ij}}_{= v_j} = 0 \Leftrightarrow \alpha_j x_{jj} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} \alpha_i x_{ij}.$$

Como

$$|\alpha_j|\,|x_{jj}| = |\alpha_j x_{jj}| = \left| -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} \alpha_i x_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} |\alpha_i x_{ij}| = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} |\alpha_i|\,|x_{ij}| \underset{\substack{|\alpha_i| \leq |\alpha_j| \\ i=1,\ldots,r}}{\leq} |\alpha_j| \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} |x_{ij}| \right)$$

e $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) então teríamos

$$|x_{jj}| \leq \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} |x_{ij}| \right)$$

o que contradiz a hipótese de se ter $|x_{jj}| > \sum\limits_{i=1(i\neq j)}^{r} |x_{ij}|$ para todo o $j = 1, \ldots, r$. Logo mostrámos que a existir $\alpha_j \neq 0$ (com $j \in \{1, \ldots, r\}$) tal que $|\alpha_j| \geqslant |\alpha_i|$, para todo o $i = 1, \ldots, r$, então $v_j \neq 0$, o que equivale a dizer que o conjunto $\{\mathbf{x^1}, \mathbf{x^2}, \ldots, \mathbf{x^r}\}$ é linearmente independente.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Ano Lectivo 2009/2010
12 de Dezembro de 2009
Duração: 1h e 30 min.

2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

Atenção: apresente os cálculos em todas as respostas.

1) Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2, com as operações usuais. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T(p(t)) = 2p(0) - tp'(t),$$

onde $p'(t)$ é a derivada de 1^a ordem de $p(t)$.

a) (1.0) Determine a matriz $M(T; B; B)$ que representa a aplicação linear T em relação à base $B = \{1, t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

b) (1.0) Determine uma base para o contradomínio de T e indique a sua dimensão. Diga, justificando, se T é injectiva.

2) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,-1), (1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) (1.0) Determine uma base para o núcleo de T e indique a sua dimensão. Diga, justificando, se T é sobrejectiva.

b) (1.0) Determine $T(1,0,1)$ e resolva em $\mathbb{R}^3$, a equação linear $T(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

3) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (0, y, x+z).$$

a) (1.0) Determine os valores próprios de T e os respectivos subespaços próprios.

b) (1.0) Justifique a seguinte afirmação:
"a transformação linear T representa geometricamente uma projecção sobre um plano Π, paralelamente ao vector w", explicitando w e Π.

4) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto

$$\{(1,0,-1),(0,1,2)\}.$$

a) (1.0) Determine uma base ortogonal para U.

b) (1.0) Determine $u \in U$ e $v \in U^{\perp}$ tais que

$$(2,-3,4) = u + v.$$

c) (1.0) Determine a distância entre o ponto $(2,3,7)$ e o plano $\{(1,2,3)\} + U$.

5) (1.0) Sejam $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes reais do tipo 2×2 e $\mathcal{P}_2$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2, ambos com as operações usuais.

Seja U o subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

e seja V o subespaço de $\mathcal{P}_2$ gerado por

$$\{1+t, t+t^2\}.$$

Considere a transformação linear $T : U \to V$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = t + t^2 \quad \text{e} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1 + t.$$

a) Determine a matriz que representa a aplicação linear T em relação às bases

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{e} \qquad \{1+2t+t^2, 1-t^2\}$$

de U e V respectivamente.

b) Determine a expressão geral de T, isto é, determine

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right),$$

para todo o $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$.

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Ano Lectivo 2009/2010
12 de Dezembro de 2009
Duração: 1h e 30 min.

Resolução do 2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

1) a) (1.0) Sendo $B=\{1,t,t^2\}$, como $T(1)=2$, $T(t)=-t$ e $T(t^2)=-2t^2$ então

$$M(T;B;B)=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

b) (1.0) Como $\{1,t,t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T)=L\left(\left\{T(1),T(t),T\left(t^2\right)\right\}\right)=L\left(\left\{2,-t,-2t^2\right\}\right)=L\left(\left\{1,t,t^2\right\}\right)=\mathcal{P}_2$$

e $\dim\mathcal{I}(T)=3$, uma vez que $\{1,t,t^2\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ (contradomínio de T). Como

$$3=\dim\mathcal{P}_2=\dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{I}(T)=\dim\mathcal{N}(T)+3\Leftrightarrow\dim\mathcal{N}(T)=0$$

então T é injectiva.

2) a) (1.0) $\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2))=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=$

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x-2y+z=0\right\}=\left\{(2y-z,y,z)\in\mathbb{R}^3: y,z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Logo

$$\mathcal{N}(T)=\{(2y-z)(1,0,1)+y(0,1,1)+z(1,1,0): y,z\in\mathbb{R}\}=$$
$$=\{(2y,y+z,3y-z): y,z\in\mathbb{R}\}=L(\{(2,1,3),(0,1,-1)\}).$$

Como o conjunto $\{(2,1,3),(0,1,-1)\}$ gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente então é uma base de $\mathcal{N}(T)$.

Logo $\dim\mathcal{N}(T)=2$. Como

$$\dim\mathbb{R}^3=\dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{I}(T)\Leftrightarrow 3=2+\dim\mathcal{I}(T)\Leftrightarrow\dim\mathcal{I}(T)=1$$

então $\mathcal{I}(T)\neq\mathbb{R}^3$ e como tal T não é sobrejectiva.

b) (1.0) Como $T(1,0,1)=1(1,-1)+(-2)(1,1)=(-1,-3)\Leftrightarrow T\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, a solução geral de $T(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ é dada por:

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: T(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}=\left\{\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)\right\}+\mathcal{N}(T)=$$

$$= \left\{ \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right) + s\,(2,1,3) + t\,(0,1,-1) : s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3) a) (1.0) Seja $\mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Seja $A = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (0,0,1)$, $T(0,1,0) = (0,1,0)$ e $T(0,0,1) = (0,0,1)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

Determinemos os valores próprios de T. Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(1-\lambda)^2.$

Logo, os valores próprios de T são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}\,(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}\,(A - 0I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \{(-z,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(-1,0,1)\}\right).$$

O conjunto $\{(-1,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são $u = (-s,0,s)$, com $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$E_{\lambda_2} = \mathcal{N}\,(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}\,(A - I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \{(0,y,z) : y,z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right).$$

O conjunto $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ são $u = (0,s,t)$, com $s,t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

b) (1.0) Tem-se $T^2 = T$, razão pela qual a transformação linear T é uma projecção. Como $\{(0,1,0),(0,0,1),(-1,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de T, cujos valores próprios associados são respectivamente 1 e 0, tendo-se

$$\begin{aligned} T(0,1,0) &= 1(0,1,0) = (0,1,0) \\ T(0,0,1) &= 1(0,0,1) = (0,0,1) \\ T(-1,0,1) &= 0(-1,0,1) = (0,0,0). \end{aligned}$$

Assim, T projecta os elementos de $\mathbb{R}^3$ sobre um plano, paralelamente a um vector, sendo o plano dado por:

$$L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$$

isto é, por:

$$x = 0$$

e o vector dado por:

$$(-1, 0, 1).$$

4) a) (1.0) Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1 = (1, 0, -1) \quad \text{e} \quad v_2 = (0, 1, 2) - \text{proj}_{(1,0,-1)}(0, 1, 2).$$

Tem-se então:

$$v_2 = (0, 1, 2) - \frac{\langle (0, 1, 2), (1, 0, -1) \rangle}{\|(1, 0, -1)\|^2}(1, 0, -1) = (0, 1, 2) - \frac{-2}{2}(1, 0, -1) = (1, 1, 1).$$

Logo, o conjunto

$$\{(1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$$

é uma base ortogonal de U.

b) (1.0) Tem-se

$$\begin{aligned} U^\perp &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (1, 0, -1) \rangle = 0 \ \text{ e } \ \langle (x, y, z), (1, 1, 1) \rangle = 0\right\} = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(1, -2, 1)\}\right), \end{aligned}$$

sendo $\{(1, -2, 1)\}$ uma base ortogonal de $U^\perp$. Deste modo, uma vez que se tem

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp,$$

e sendo $\{(1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$ uma base ortogonal de U, então

$$(2, -3, 4) = P_U(2, -3, 4) + P_{U^\perp}(2, -3, 4) =$$

$$= \frac{\langle (2, -3, 4), (1, 0, -1) \rangle}{\|(1, 0, -1)\|^2}(1, 0, -1) + \frac{\langle (2, -3, 4), (1, 1, 1) \rangle}{\|(1, 1, 1)\|^2}(1, 1, 1) + \frac{\langle (2, -3, 4), (1, -2, 1) \rangle}{\|(1, -2, 1)\|^2}(1, -2, 1) =$$

$$= -(1, 0, -1) + (1, 1, 1) + 2(1, -2, 1) =$$

$$= \underbrace{(0, 1, 2)}_{\in U} + \underbrace{(2, -4, 2)}_{\in U^\perp}.$$

Isto é,

$$(2, -3, 4) = \underbrace{(0, 1, 2)}_{\in U} + \underbrace{(2, -4, 2)}_{\in U^\perp}.$$

c) (1.0) A distância entre o ponto $(2, 3, 7)$ e o plano $\{(1, 2, 3)\} + U$ é dada por:

$$d((2, 3, 7), \{(1, 2, 3)\} + U) = \|P_{U^\perp}((2, 3, 7) - (1, 2, 3))\| = \|P_{U^\perp}(1, 1, 4)\| =$$

$$= \left\| \frac{\langle (1,1,4),(1,-2,1) \rangle}{\|(1,-2,1)\|^2}(1,-2,1) \right\| = \frac{1}{2}\|(1,-2,1)\| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

5) (1.0) **a)** Como

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(t+t^2\right) + \frac{1}{2}(1+t) = \frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}t^2 =$$

$$= \frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\left(1+2t+t^2\right) + 0\left(1-t^2\right)$$

e

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\left(t+t^2\right) + \frac{1}{2}(1+t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 =$$

$$= 0\left(1+2t+t^2\right) + \frac{1}{2}\left(1-t^2\right)$$

a matriz que representa a aplicação linear T em relação às bases

$$B_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{e} \qquad B_2 = \left\{1+2t+t^2, 1-t^2\right\}$$

de U e V respectivamente, é dada por

$$M\left(T; B_1; B_2\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$. Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo $a = \alpha + \beta = d$, $\beta = c$ e $\alpha = b$, tendo-se

$$U = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a = b + c = d\right\}.$$

e, para $b, c \in \mathbb{R}$,

$$T\begin{bmatrix} b+c & b \\ c & b+c \end{bmatrix} = bT\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + cT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= b\left(\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}t^2\right) + c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2\right) = \frac{b+c}{2} + bt + \frac{b-c}{2}t^2$$

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Ano Lectivo 2009/2010
15 de Janeiro de 2010
1º T: 1h 30 min; 2º T: 1h 30 min

Teste de Recuperação de ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

Atenção: apresente os cálculos em todas as respostas. Caso as respostas às questões 1d e 3d do Grupo I não estejam correctas as respectivas classificações serão zero.

I (1º Teste - 10 val.)

1) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e considere as matrizes $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha & -1 \\ 0 & 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 0 & -\alpha & \alpha-2 \end{bmatrix}$, $B_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta-1 \\ \beta+\beta^2 \end{bmatrix}$.

a) (1.0) Determine as características das matrizes A_α e $[A_\alpha \mid B_\beta]$ em função dos respectivos parâmetros.

b) (1.0) Discuta, em termos dos parâmetros reais α e β, a existência ou não de solução do sistema de equações lineares $A_\alpha X = B_\beta$. Nos casos em que existirem soluções, determine-as.

c) (1.0) Determine uma base para o espaço das colunas e uma base para o núcleo da matriz A_0.

d) (1.0) Determine a inversa da matriz A_{-1}.

e) (1.0) **Sem inverter** a matriz A_3, calcule a entrada $(3,1)$ da matriz inversa de A_3.

2) (1.0) Calcule $\det\left[\left(-\frac{1}{2}A^2B^T\right)^{-1}\right]$, com $A, B \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ tais que $\det A = -2$ e $\det B = 2$.

3) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}$. Seja $S = \{(1,0,0,2)\} + U$ e considere ainda o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = w\}.$$

a) (0.5) Determine um sistema de duas equações lineares cujo conjunto de soluções seja S.

b) (0.5) Encontre uma matriz A do tipo 2×4 cujo núcleo seja igual a U.

c) (0.5) Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclua dois vectores de U.

d) (0.5) Sendo $\mathcal{B} = \{(2,2,0,0),(1,1,0,1)\}$ uma base ordenada de U, calcule as coordenadas do vector $(1,1,0,-7)$ em relação a $\mathcal{B}$.

e) (1.0) Determine uma base para $U+V$ e uma base para $U \cap V$, indicando as respectivas dimensões.

4) (1.0) Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço linear V. Mostre que $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\}$ é também uma base de V.

II (2^o Teste - 10 val.)

1) Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $B_c=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $B'=\{(1,1,0),(1,-1,1),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por: $M(T;B_c;B')=\begin{bmatrix}-1&0&2\\4&2&2\\1&1&3\end{bmatrix}$.

a) (1.0) Determine uma base para o núcleo de T e indique a sua dimensão.

b) (1.0) Determine uma base para o contradomínio de T e indique a sua dimensão.

c) (1.0) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x,y,z)$, para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

2) Seja $\mathcal{P}_2=\{p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2 : a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2, com as operações usuais.

a) (1.0) Considere a transformação linear $T_1:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_2$ cuja representação matricial em relação à base ordenada $B=\{1,t,t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$ é dada por:

$$M(T_1;B;B)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Determine uma base para o contradomínio de T_1 e indique a sua dimensão. Diga, justificando, se T_1 é injectiva.

b) (1.0) Considere a transformação linear $T_2:\mathcal{P}_2\to\mathcal{P}_2$ definida por $T_2(p(t))=(tp'(t))'$, onde $p'(t)$ é a derivada de 1^a ordem de $p(t)$. Resolva em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $T_2(p(t))=\dfrac{1}{4}+t$.

3) Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(x+2z,y,2x+z)$.

a) (1.0) Determine os valores próprios de T e diga, justificando, se T é invertível e se T é diagonalizável.

b) (1.0) Diga se T pode ou não ser representada por uma matriz diagonal em relação a uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Em caso afirmativo, determine uma tal base ordenada e indique a correspondente matriz diagonal que representa T.

4) Seja $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$

respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

a) (1.0) Determine uma base ortogonal para $\mathcal{L}(A)$.

b) (1.0) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.

c) (1.0) Determine o elemento de $(\mathcal{N}(A))^\perp$ mais próximo de $(-1,1,-1)$ e a distância entre $(-1,1,-1)$ e $(\mathcal{L}(A))^\perp$.

Instituto Superior Técnico | Ano Lectivo 2009/2010
Departamento de Matemática | 15 de Janeiro de 2010
Secção de Álgebra e Análise | 1º T: 1h 30 min; 2º T: 1h 30 min

Resolução do Teste de Recuperação de ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

I (1º Teste - 10 val.)

1) a) (1.0) e **b)** (1.0)

$$[A_\alpha \mid B_\beta] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\alpha & -1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & -1 & \beta-1 \\ 1 & 0 & -\alpha & \alpha-2 & \beta+\beta^2 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \beta-1 \\ 0 & 1 & \alpha & -1 & \beta-1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha-2 & \beta+\beta^2-1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & \beta^2 \end{array}\right]$$

$$A_\alpha X = B_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \alpha z = 1 \\ y - w = \beta - 1 \\ \alpha z = 0 \\ (\alpha-1)\, w = \beta^2 \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$ então $\underbrace{\operatorname{car} A_\alpha}_{=3} < \underbrace{\operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\beta]}_{=4}$. Logo, o sistema não tem solução (é impossível).

$$S_{\alpha,\beta} = \varnothing.$$

Se $\alpha = 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\beta] = 3 < 4 =$ nº de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$A_\alpha X = B_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta - \beta^2 \\ y = -1 + \beta - \beta^2 \\ z \in \mathbb{R} \\ w = -\beta^2 \end{cases}$$

A solução geral deste sistema é então dada por

$$S_{\alpha,\beta} = \left\{ \left(\beta + \beta^2, -1 + \beta + \beta^2, z, -\beta^2\right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B_\beta] = 3 < 4 =$ nº de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e indeterminado, tendo-se

$$A_\alpha X = B_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = w \\ y = w - 1 \\ z = 0 \\ w \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A solução geral deste sistema é então dada por

$$S_{\alpha,\beta} = \{(\beta + w, \beta + w - 1, 0, w) : w \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$ então $\operatorname{car} A_\alpha = \operatorname{car}[A_\alpha \mid B] = 4 =$ nº de incógnitas do sistema. Logo o sistema é possível e determinado, tendo-se

$$A_\alpha X = B_\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - \alpha z = 1 \\ y - w = \beta - 1 \\ \alpha z = 0 \\ (\alpha - 1)\, w = \beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\beta^2}{\alpha - 1} + \beta \\ y = \dfrac{\beta^2}{\alpha - 1} + \beta - 1 \\ z = 0 \\ w = \dfrac{\beta^2}{\alpha - 1} \end{cases}$$

A solução geral do sistema é então dada por

$$S_{\alpha,\beta} = \left\{ \left(\frac{\beta^2}{\alpha - 1} + \beta, \frac{\beta^2}{\alpha - 1} + \beta - 1, 0, \frac{\beta^2}{\alpha - 1} \right) \right\}.$$

c) (1.0)

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A_0'.$$

As colunas da matriz A_0 correspondentes às colunas da matriz A_0' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A_0) = L\left(\{(1,1,0,1), (-1,0,1,0), (0,-1,-1,-2)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,1,0,1), (-1,0,1,0), (0,-1,-1,-2)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A_0)$ e

$$\operatorname{car} A = \dim \mathcal{C}(A_0) = \dim \mathcal{L}(A_0) = 3.$$

Uma base para $\mathcal{N}(A_0)$:

$$\mathcal{N}(A_0) = \left\{ u \in \mathbb{R}^4 : A_0 u = \mathbf{0} \right\} = \mathcal{N}(A_0').$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 - u_3 = 0 \\ u_2 - u_4 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_4 = 0 \end{cases}$$

então

$$\mathcal{N}(A_0) = \mathcal{N}(A_0') = \{(0,0,u_3,0) : u_3 \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(0,0,1,0)\}\right)$$

O conjunto $\{(0,0,1,0)\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A_0)$, logo é uma base de $\mathcal{N}(A_0)$ e:

$$\operatorname{nul}(A_0) = \dim \mathcal{N}(A_0) = 1.$$

d) (1.0) $\left[\begin{array}{c|c} A_{-1} & I \end{array}\right] =$

$$
= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_2+L_3 \to L_3 \\ -L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}
$$

$$
\underset{\substack{-L_2+L_3 \to L_3 \\ -L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3+L_1 \to L_1 \\ -\frac{1}{2}L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{\substack{-L_2+L_3- \\ -L_2+L_4-}}{\longrightarrow}
$$

$$
\underset{\substack{L_4+L_2 \to L_2 \\ -L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{L_2+L_1 \to L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]
$$

Logo

$$
(A_{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.
$$

e) (1.0)

$$
\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6.
$$

Logo,

$$
\left((A_3)^{-1}\right)_{(3,1)} = \frac{1}{\det A_3}\left((\operatorname{cof} A_3)^T\right)_{(3,1)} = \frac{1}{\det A_3}(\operatorname{cof} A_3)_{(1,3)} = \frac{1}{6}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.
$$

2) (1.0) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $\det A = -2$ e $\det B = 2$.

$$
\det\left[\left(-\frac{1}{2}A^2B^T\right)^{-1}\right] = \frac{1}{\det\left(-\frac{1}{2}A^2B^T\right)} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3(\det A)^2\det B} = -1.
$$

3) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}$. Seja $S = \{(1,0,0,2)\} + U$ e considere ainda o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$

$$
V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = w\right\}.
$$

a) (0.5)

$$
S = \{(1,0,0,2)\} + U = \{(1+s+t, s+t, 0, 2-s+t) : s,t \in \mathbb{R}\}.
$$

Sejam $x = 1 + s + t, \quad y = s + t, \quad z = 0, \quad w = 2 - s + t$. Tem-se então o seguinte sistema linear (com 4 variáveis) não homogéneo

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

b) (0.5) Seja $(x, y, z, w) \in U$. Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, y, z, w) = \alpha(1, 1, 0, -1) + \beta\,(1, 1, 0, 1)\,. \qquad (*)$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ -1 & 1 & w \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y - x \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 2 & x + w \end{array}\right]$$

para que a equação (*) tenha solução é preciso que: $y - x = 0$ e $z = 0$, ou seja $(x, y, z, w) \in \mathcal{N}(A)$, com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Reciprocamente, se $(x, y, z, w) \in \mathcal{N}(A)$ então $(x, y, z, w) \in U$. Logo $U = \mathcal{N}(A)$.

c) (0.5) Uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclui dois vectores de U:

$$\{(1, 1, 0, -1), (1, 1, 0, 1)\,, (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$$

Note-se que $(1, 1, 0, -1), (1, 1, 0, 1) \in U$ e que 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes, formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

d) (0.5) Seja $\mathcal{B} = \{(2, 2, 0, 0), (1, 1, 0, 1)\}$ uma base ordenada de U.
Tem-se

$$(1, 1, 0, -7) = 4(2, 2, 0, 0) - 7\,(1, 1, 0, 1)\,.$$

Logo, 4 e -7 são as coordenadas de $(1, 1, 0, -7)$ em relação à base $\mathcal{B}$

e) (1.0) Determine uma base para $U + V$ e uma base para $U \cap V$, indicando as respectivas dimensões.

Tem-se (em $\mathbb{R}^4$) $U = L\,(\{(1, 1, 0, -1), (1, 1, 0, 1)\})$ e

$$V = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = w\right\} = L\,(\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\,, (0, 0, 1, 0)\})\,.$$

Como $(1, 1, 0, -1) \notin V$ e $(1, 1, 0, 1) \in V$, então

$$\{(1, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\,, (0, 0, 1, 0)\}$$

é uma base de $U + V$, tendo-se $\dim(U + V) = 4$, pelo que $U + V = \mathbb{R}^4$.
Além disso, como $U = L\,(\{(1, 1, 0, -1), (1, 1, 0, 1)\})$ e

$$(1, 1, 0, -1) \notin V, \quad (1, 1, 0, 1) \in V$$

então $\{(1,1,0,1)\}$ é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim(U \cap V) = 1$. De facto

$$\underbrace{\dim(U \cap V)}_{=1} = \underbrace{\dim U}_{=2} + \underbrace{\dim V}_{=3} - \underbrace{\dim(U+V)}_{=4}.$$

4) (1.0) Seja $\{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço linear V. Observe-se que

$$\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\} \subset L(\{v_1, v_2, v_3\}),$$

pelo que

$$L(\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\}) \subseteq L(\{v_1, v_2, v_3\}).$$

Mas, como

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2}(v_1+v_2) - \frac{1}{2}(v_2+v_3) + \frac{1}{2}(v_1+v_3) \\ \\ v_2 = \frac{1}{2}(v_1+v_2) - \frac{1}{2}(v_1+v_3) + \frac{1}{2}(v_2+v_3) \\ \\ v_3 = \frac{1}{2}(v_1+v_3) - \frac{1}{2}(v_1+v_2) + \frac{1}{2}(v_2+v_3) \end{cases}$$

tem-se

$$L(\{v_1, v_2, v_3\}) \subseteq L(\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\}).$$

Logo,

$$L(\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\}) = L(\{v_1, v_2, v_3\}) = V.$$

Vejamos agora que o conjunto $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\}$ é linearmente independente:

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1(v_1+v_2) + \lambda_2(v_2+v_3) + \lambda_3(v_1+v_3) = \mathbf{0}$. Isto é,

$$(\lambda_1+\lambda_3)v_1 + (\lambda_1+\lambda_2)v_2 + (\lambda_2+\lambda_3)v_3 = \mathbf{0}.$$

Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de V, em particular é linearmente independente. Logo,

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

o que é equivalente ao sistema homogéneo:

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Como $\det A = 2 \neq 0$, então A é invertível e tem-se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Logo, $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3\}$ é uma base de V pois trata-se de um conjunto de vectores linearmente independente que gera V.

II (2^o Teste - 10 val.)

1) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $B' = \{(1,1,0),(1,-1,1),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é dada por: $M(T;B_c;B') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) (1.0) $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(M(T;B_c;B')) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2z = 0 \ \text{ e } \ y + 5z = 0\right\} = \left\{(2z,-5z,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(2,-5,1)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(2,-5,1)\}$ gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente então é uma base de $\mathcal{N}(T)$. Logo $\dim \mathcal{N}(T) = 1$.

b) (1.0) Como $B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ gera $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\}\right).$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= -(1,1,0)) + 4(1,-1,1) + (0,1,1) = (3,-4,5), \\ T(0,1,0) &= 0(1,1,0)) + 2(1,-1,1) + (0,1,1) = (2,-1,3), \\ T(0,0,1) &= 2(1,1,0)) + 2(1,-1,1) + 3(0,1,1) = (4,3,5) \end{aligned}$$

e $\dim \mathcal{I}(T) = \operatorname{car} M(T;B_c;B') = 2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\{(3,-4,5),(2,-1,3),(4,3,5)\}\right) = L\left(\{(2,-1,3),(4,3,5)\}\right)$$

uma vez que $\{(2,-1,3),(4,3,5)\}$ é linearmente independente, é assim uma base de $\mathcal{I}(T)$.

c) (1.0) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x,y,z)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.Atendendo à alínea anterior, tem-se

$$T(x,y,z) = M(T;B_c;B_c)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (3x+2y+4z, -4x-y+3z, 5x+3y+5z),$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2) a) (1.0) Considere a transformação linear $T_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ cuja representação matricial em relação à base ordenada $B = \{1,t,t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$ é dada por:

$$M(T_1;B;B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base para o contradomínio de T_1 e indique a sua dimensão. Diga, justificando, se T_1 é injectiva.Como $B = \{1, t, t^2\}$ gera $\mathcal{P}_2$, tem-se

$$\mathcal{I}(T) = L\left(\left\{T(1), T(t), T\left(t^2\right)\right\}\right) = L(\{1, 4t\}).$$

Como $\{1, 4t\}$ é linearmente independente e gera $\mathcal{I}(T)$, é assim uma base de $\mathcal{I}(T)$, tendo-se $\dim \mathcal{I}(T) = 2$.

Como

$$\dim \mathcal{N}(T) = \dim \mathcal{N}(M(T_1; B; B)) = \text{nul}(M(T_1; B; B)) = 3 - \text{car}(M(T_1; B; B)) = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

então T não é injectiva.

b) (1.0) $T_2(p(t)) = \frac{1}{4} + t \Leftrightarrow (tp'(t))' = \frac{1}{4} + t \Leftrightarrow \left(t\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right)'\right)' = \frac{1}{4} + t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a_1 + 4a_2 t = \frac{1}{4} + t \Leftrightarrow \left(a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad a_0 \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow p(t) \in \left\{\frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2\right\} + L(\{1\}).$$

3) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2z, y, 2x + z)$.

a) (1.0) e **b)** (1.0) Seja $\mathcal{B}_c^3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (1, 0, 2)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (2, 0, 1)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

Determinemos os valores próprios de T. Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 4\right] = (1-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda).$$

Logo, os valores próprios de T são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_2 = 3$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$E_{\lambda_1} = \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(0, 1, 0)\}).$$

O conjunto $\{(0, 1, 0)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ são $u = (0, s, 0)$, com $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$E_{\lambda_2} = \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A + I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = L(\{(-1,0,1)\}).$$

O conjunto $\{(-1,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = -1$ são $u = (-s, 0, s)$, com $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

O subespaço próprio E_{λ_3} é dado por

$$E_{\lambda_3} = \mathcal{N}(T - \lambda_3 I) = \mathcal{N}(A - 3I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \{(x,0,x) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0,1)\}).$$

O conjunto $\{(1,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_3}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_3 = 3$ são $u = \{(s,0,s)\}$, com $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Como 0 não é valor próprio de T então T é invertível. Como T tem 3 valores próprios distintos, os vectores próprios associados serão linearmente independentes, pelo que existirá uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios, por exemplo:

$$\{(0,1,0), (-1,0,1), (1,0,1)\}.$$

Isto é, T é representada em relação à base anterior pela matriz diagonal: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **a)** (1.0) O conjunto $\{(1,0,1), (1,1,0)\}$ é uma base para $\mathcal{L}(A)$ pois gera $\mathcal{L}(A)$ e é linearmente independente.

Aplicando Gram-Schmidt, o conjunto $\left\{(1,0,1), (1,1,0) - \text{proj}_{(1,0,1)}(1,1,0)\right\} =$

$$= \left\{(1,0,1), (1,1,0) - \frac{\langle (1,1,0), (1,0,1) \rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1)\right\} = \left\{(1,0,1), \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

é uma base ortogonal para $\mathcal{L}(A)$.

b) (1.0) Uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{C}(A)$:

$$\left\{(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Note que $(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \mathcal{C}(A)$.

c) (1.0) O elemento de $(\mathcal{N}(A))^{\perp} = \mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(-1,1,-1)$ é:

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{L}(A)}(-1,1,-1) &= (-1,1,-1) - P_{\mathcal{N}(A)}(-1,1,-1) \underset{\mathcal{N}(A)=\mathcal{L}(\{(1,-1,-1)\})}{=} \\
&= (-1,1,-1) - \frac{\langle(-1,1,-1),(1,-1,-1)\rangle}{\|(1,-1,-1)\|^2}(1,-1,-1) = \\
&= (-1,1,-1) + \frac{1}{3}(1,-1,-1) = \left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)
\end{aligned}$$

e a distância entre $(-1,1,-1)$ e $(\mathcal{L}(A))^{\perp}$ é:

$$d\left((-1,1,-1),(\mathcal{L}(A))^{\perp}\right) = \|P_{\mathcal{L}(A)}(-1,1,-1)\| = \left\|\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)\right\| = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$