

22 Séculos a Medir Área

Miguel Abreu

Centro de Análise Matemática, Geometria e Sistemas Dinâmicos
Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa

Introdução e Objectivos

Baseado numa **vinheta Klein** escrita em co-autoria com **Ana Cannas da Silva** para o **Projeto Klein de Matemática em Língua Portuguesa**, que se insere no **Klein Project** da **International Mathematical Union (IMU)** e **International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)**.

Dar explicação **simpléctica** para a fórmula

$$\text{Volume } B^{2n}(R) = \frac{\pi^n R^{2n}}{n!} = (2\pi)^n \cdot \frac{(R^2/2)^n}{n!}.$$

Nota: Volume $B^N(R) = \pi^{N/2} R^N / \Gamma(N/2 + 1)$.

Divulgar **Projecto Klein**, em particular as suas **vinhetas**.

Teorema favorito de Arquimedes (287–212 AC)

"A área da superfície de uma esfera entre 2 planos paralelos que a intersectam depende apenas da distância entre esses planos e não da altura onde intersectam a esfera"

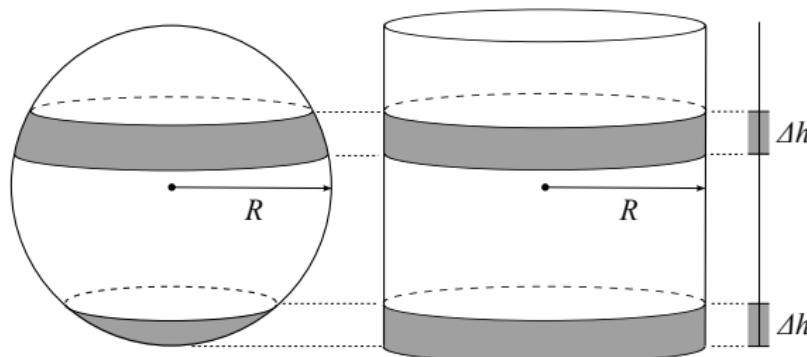


Figure: Faixas esféricas e cilíndricas com a mesma área.

Teorema favorito de Arquimedes (287–212 AC)

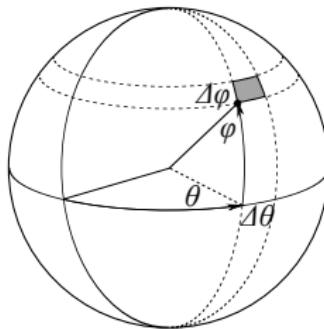


Figure: Longitude: $0 \leq \theta < 2\pi$; latitude: $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Área aproximada do rectângulo sombrado:

$$\text{altura} \times \text{largura} \simeq (R \cdot \Delta\varphi)(R \cdot \cos \varphi \cdot \Delta\theta) = \Delta\theta \cdot R^2 \cos \varphi \cdot \Delta\varphi.$$

Área aprox. da faixa esférica entre os paralelos φ e $\varphi + \Delta\varphi$:

$$\text{área}_{\text{esf}} \simeq 2\pi R^2 \cos \varphi \cdot \Delta\varphi.$$

Teorema favorito de Arquimedes (287–212 AC)

Como

$$\begin{aligned}\Delta h &= R \cdot \sin(\varphi + \Delta\varphi) - R \cdot \sin \varphi \\&= R \cdot (\sin \varphi \cdot \cos \Delta\varphi + \cos \varphi \cdot \sin \Delta\varphi) - R \cdot \sin \varphi \\&= R \cdot \sin \varphi \cdot (\cos \Delta\varphi - 1) + R \cdot \cos \varphi \cdot \sin \Delta\varphi\end{aligned}$$

e

$$\cos \Delta\varphi - 1 \simeq 0, \quad \sin \Delta\varphi \simeq \Delta\varphi \quad \text{quando } \Delta\varphi \simeq 0,$$

temos que

$$\Delta h \simeq R \cdot \cos \varphi \cdot \Delta\varphi.$$

Logo

$$\text{área}_{\text{esf}} \simeq 2\pi R^2 \cdot \cos \varphi \cdot \Delta\varphi = 2\pi R \cdot \Delta h = \text{área}_{\text{cil}}.$$

Teorema favorito de Arquimedes (287–212 AC)

Assim, o uso das coordenadas (h, θ) simplifica de forma significativa o cálculo da área de certas regiões esféricas.

Estas coordenadas são um primeiro exemplo de **coordenadas de ação-ângulo**, muito usadas em **geometria simpléctica**.

Em **dimensão 2** a **Geometria Simpléctica** não é mais do que o estudo de transformações que preservam área. Este **Teorema de Arquimedes** pode ser considerado como o seu **primeiro resultado**.

Coordenadas de acção-ângulo para o círculo

$$h = \frac{1}{2}r^2 \quad \text{e} \quad \theta$$

com

θ = ângulo a partir de um semi-eixo do plano

r = distância à origem.

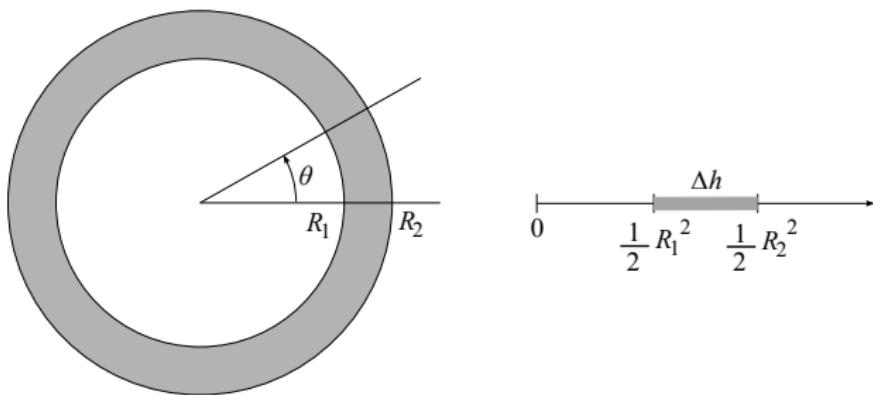


Figure: Em coordenadas de acção-ângulo, área de coroa circular
 $= 2\pi \cdot \Delta h$.

Coordenadas de acção-ângulo para $B^4 \subset \mathbb{R}^4$

$$(\textcolor{red}{h_1} = r_1^2/2, \theta_1, \textcolor{red}{h_2} = r_2^2/2, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$$

$$B^4(R) = \left\{ (h_1, \theta_1, h_2, \theta_2) : \textcolor{red}{h_1 + h_2 \leq \frac{1}{2}R^2} \right\}$$

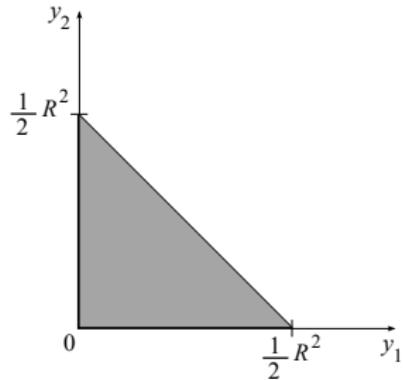
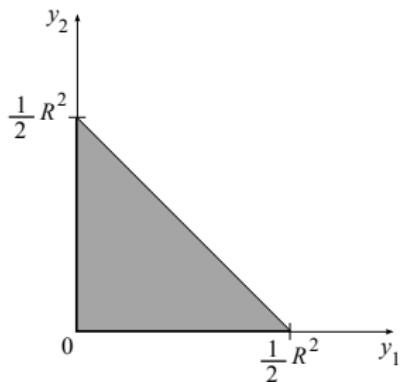


Figure: Triângulo que "codifica" a bola de raio R em dimensão 4.

Volume para $B^4 \subset \mathbb{R}^4$



$$\begin{aligned}\text{Volume } B^4(R) &= (2\pi)^2 \times \text{área do triângulo sombreado} \\ &= (2\pi)^2 \times \frac{(R^2/2)^2}{2} \\ &= \frac{\pi^2 \cdot R^4}{2}\end{aligned}$$

Coordenadas de acção-ângulo e volume para $B^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$

$$(h_1 = r_1^2/2, \theta_1, \dots, h_n = r_n^2/2, \theta_n) \in \mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2n}$$

$$B^{2n}(R) = \left\{ (h_1, \theta_1, \dots, h_n, \theta_n) : h_1 + \dots + h_n \leq \frac{1}{2}R^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}\text{Volume } B^{2n}(R) &= (2\pi)^n \times \text{volume do } n\text{-simplex correspondente} \\ &= (2\pi)^n \times \frac{(R^2/2)^n}{n!} \\ &= \frac{\pi^n \cdot R^{2n}}{n!}\end{aligned}$$

Projecto Klein

- ▶ Livros originais do Klein (recentemente traduzidos para português e publicados pela SPM)
- ▶ ICMI-IMU Klein Project
- ▶ Projecto Klein de Matemática em Língua Portuguesa (Sociedade Brasileira de Matemática, ...) com colaboração da SPM
- ▶ Vinhetas Klein