Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

GEOMETRIA SIMPLÉCTICA - 2º Semestre 2020/21

5ª Ficha de Exercícios

Data de entrega: 28 de Maio

1. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}_n \equiv$ matrizes simétricas $n \times n$, uma função suave tal que $F(u)$ é não-singular para todo o $u \in \mathbb{R}^n$. Considere a 2-forma ω definida em $\mathbb{R}^{2n} = \{(u,v) : u, v \in \mathbb{R}^n\}$ pela matriz anti-simétrica

$$\omega_{(u,v)} = \begin{bmatrix} 0 & F(u) \\ -F(u) & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Mostre que $d\omega = 0$ se e só se existe uma função suave $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f = f(u)$, tal que

$$F = \mathrm{Hess}_u(f) \equiv \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u_k \partial u_l} \right]_{k,l=1}^{n,n} .$$

   b) Considere a acção de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$t \cdot (u,v) = (u, v + t)\,, \ \forall\, t, u, v \in \mathbb{R}^n \ .$$

   Assumindo que $d\omega = 0$, mostre que esta acção de $\mathbb{R}^n$ em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ é Hamiltoniana e determine uma aplicação momento $\mu : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$.

   c) Nas condições da alínea b), determine coordenadas locais simplécticas para $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, i.e. simplectomorfismos locais entre $(\mathbb{R}^{2n} = \{(u,v)\}, \omega_{(u,v)})$ e $(\mathbb{R}^{2n} = \{(x,y)\}, \omega_0 = dx \wedge dy)$.

2. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica, e $\phi : \mathbb{T}^m \to \mathrm{Ham}(M, \omega)$ uma acção Hamiltoniana com aplicação momento $\mu : M \to \mathbb{R}^m$. Seja $\psi : \mathbb{T}^l \to \mathbb{T}^m$ um homomorfismo dado por $\psi(\theta) = A\theta$, com $A \in \mathbb{Z}^{m \times l}$ uma matriz $(m \times l)$ com entradas em $\mathbb{Z}$. Mostre que $\phi \circ \psi : \mathbb{T}^l \to \mathrm{Ham}(M, \omega)$ é uma acção Hamiltoniana com aplicação momento $\nu : M \to \mathbb{R}^l$ dada por $\nu = A^t \mu$.

3. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica e $\phi : \mathbb{T}^m = \mathbb{T}^{m_1} \times \mathbb{T}^{m_2} \to \mathrm{Ham}(M, \omega)$ uma acção Hamiltoniana com aplicação momento $\mu = (\mu_1, \mu_2) : M \to \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$.

   a) Mostre que $\mu_i : M \to \mathbb{R}^{m_i}\,,\ i = 1, 2$, é uma aplicação momento para a acção Hamiltoniana de $\mathbb{T}^{m_i}$ em (M, ω) naturalmente induzida por ϕ.

   b) Seja $Z_1 = \mu_1^{-1}(0)$, suponha que $\mathbb{T}^{m_1}$ actua livremente em Z_1, e denote por (M_0, τ_0) a correspondente redução simpléctica, i.e. $M_0 = Z_1/\mathbb{T}^{m_1}$ e τ_0 é a forma simpléctica em M_0 caracterizada por $\pi^*(\tau_0) = \iota^*(\omega)$, onde $\pi : Z_1 \to M_0$ e $\iota : Z_1 \to M$ denotam respectivamente a projecção e inclusão naturais. Mostre que a accção Hamiltoniana de $\mathbb{T}^{m_2}$ em M induz naturalmente uma accção Hamiltoniana de $\mathbb{T}^{m_2}$ em M_0 com uma aplicação momento $\nu : M_0 \to \mathbb{R}^{m_2}$ caracterizada por $\nu \circ \pi = \mu_2 \circ \iota$.

4. Considere a acção de $\mathbb{T}^1 = S^1$ em $(\mathbb{R}^{2(n+1)}, \omega_0)$ que, usando a identificação natural $\mathbb{R}^{2(n+1)} = \mathbb{C}^{n+1}$, é dada por

$$\theta \cdot (z_0, \ldots, z_n) = (e^{-i\theta} z_0, \ldots, e^{-i\theta} z_n) \, , \ \forall \, z \in \mathbb{C}^{n+1}, \, \theta \in \mathbb{R} \ .$$

a) Verifique que esta acção é Hamiltoniana com uma aplicação momento $\mu : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(z) = \frac{1}{2}(|z|^2 - 1) \ .$$

Sugestão: use o exercício 2.

b) Mostre que a redução simpléctica $(M_0 = \mu^{-1}(0)/S^1, \tau_0)$ é $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ com a forma simpléctica de Fubini-Study ω_{FS}.

5. Mostre que a acção de $\mathbb{T}^n$ em $(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, \omega_{\mathrm{FS}})$ dada por

$$(\theta_1, \ldots, \theta_n) \cdot [z_0, \ldots, z_n] = [z_0, e^{-i\theta_1} z_1, \ldots, e^{-i\theta_n} z_n] \, , \ \forall \, z \in \mathbb{C}^{n+1}, \, \theta \in \mathbb{R}^n \, ,$$

é Hamiltoniana e determine uma aplicação momento $\mu : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}^n$. Caracterize explicitamente (i.e. sem recorrer ao Teorema de Convexidade de Atiyah-Guillemin-Sternberg) o polítopo momento $\mu(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$.
Sugestão: use os exercícios 3 e 4.