Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

GEOMETRIA SIMPLÉCTICA - 2º Semestre 2020/21
3ª Ficha de Exercícios
Data de entrega: 30 de Abril

1. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica compacta, $f, g \in C^\infty(M)$ duas funções suaves e $\phi_t, \psi_t \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ os fluxos Hamiltonianos (autónomos) gerados por X_f e X_g respectivamente. Mostre que $\phi_t \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_t\,,\ \forall t \in [0,1]$, se e só se o parentesis de Poisson $\{f, g\} \equiv \omega(X_f, X_g) \in C^\infty(M)$ é identicamente nulo.

2. Mostre que o fluxo : $\widetilde{\mathrm{Dif}}_0(M, \omega) \to H^1(M, \mathbb{R})$, definido por
$$\mathrm{fluxo}(\phi_t) = \int_0^1 [X_t \lrcorner\, \omega]\, dt\ ,$$
onde $\phi_t \in \mathrm{Dif}_0(M, \omega)$ satisfaz
$$\frac{d}{dt}\phi_t = X_t \circ \phi_t \qquad \text{e} \qquad \phi_0 = \mathrm{id}\,,$$
é de facto um homomorfismo de grupos.

3. Considere numa variedade simpléctica (M, ω), um simplectomorfismo $\psi \in \mathrm{Dif}(M, \omega)$ e uma isotopia $\phi_t \in \mathrm{Dif}_0(M, \omega)\,,\ t \in [0,1]$. Mostre que
$$\mathrm{fluxo}(\psi^{-1} \circ \phi_t \circ \psi) = \psi^*(\mathrm{fluxo}(\phi_t))\ .$$

4. Considere a variedade simpléctica $(M \times M, \tilde{\omega} = -\pi_1^*(\omega) + \pi_2^*(\omega))$, onde (M, ω) é uma variedade simpléctica e $\pi_k : M \times M \to M\,,\ k = 1, 2$, são as projecções naturais. Seja $\iota_\Delta : M \to M \times M$ a inclusão diagonal $\iota_\Delta(p) = (p, p)\,,\ \forall p \in M$. Dada uma isotopia $\phi_t \in \mathrm{Dif}_0(M, \omega)\,,\ t \in [0,1]$, mostre que
$$\mathrm{fluxo}(\phi_t) = \iota_\Delta^*(\mathrm{fluxo}(\mathrm{id} \times \phi_t))\ .$$

5. Considere o torus $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, com forma simpléctica ω naturalmente induzida pela forma simpléctica standard ω_0 em $\mathbb{R}^2$. Seja $\Gamma \subset H^1(M, \mathbb{R})$ o grupo de fluxo, i.e. $\Gamma \equiv \mathrm{fluxo}(\pi_1(\mathrm{Dif}_0(M, \omega)))$.

   a) Mostre que $\Gamma = H^1(M, \mathbb{Z}) \subset H^1(M, \mathbb{R})$.

   b) Seja $\phi_t \in \mathrm{Dif}(\mathbb{T}^2)\,,\ t \in [0,1]$, uma isotopia dada por
   $$\phi_t(x, y) = (x + f_t(x, y), y + g_t(x, y))\,,$$
   com $f_t, g_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas famílias suaves de funções suaves com período 1 em cada uma das variáveis $x, y \in \mathbb{R}$, e tais que $f_0 \equiv g_0 \equiv 0$. Mostre que se $\phi_t \in \mathrm{Ham}(\mathbb{T}^2, \omega)\,,\ \forall t \in [0,1]$, então
   $$\int_{\mathbb{T}^2} f_t\, \omega = \int_{\mathbb{T}^2} g_t\, \omega = 0\,,\ \forall t \in [0,1]\ .$$