Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

GEOMETRIA SIMPLÉCTICA - 2º Semestre 2020/21

2ª Ficha de Exercícios

Data de entrega: 09 de Abril

1. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica, $\psi : M \to M$ um simplectomorfismo e $h : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Mostre que os campos vectoriais Hamiltonianos X_h e $X_{h\circ\psi^{-1}}$ satisfazem a relação
$$X_{h\circ\psi^{-1}} = \psi_* X_h \ .$$

2. Seja L uma variedade diferenciável e T^*L o seu fibrado cotangente equipado com a forma simpléctica canónica $\omega_{\mathrm{can}} = -d\lambda_{\mathrm{can}}$. Seja ainda $h : L \to \mathbb{R}$ uma função suave e $\psi_h : T^*L \to T^*L$ o difeomorfismo definido por
$$\psi_h(x, \alpha) = (x, \alpha + dh_x) \,,\ \forall x \in L \,,\ \alpha \in T_x^*L \ .$$
Mostre que
$$\psi_h^*(\lambda_{\mathrm{can}}) = \lambda_{\mathrm{can}} + \pi^*(dh) \,,$$
onde $\pi : T^*L \to L$ é a projecção natural $\pi(x, \alpha) = x$. Conclua que ψ_h é um simplectomorfismo de $(T^*L, \omega_{\mathrm{can}})$.

3. Seja M uma variedade diferenciável compacta e conexa com dimensão m, e sejam $\sigma_0, \sigma_1 \in \Omega^m(M)$ duas formas de volume. Mostre que se $[\sigma_0] = [\sigma_1]$ em $H^m_{\mathrm{dR}}(M)$, i.e. $\int_M \sigma_0 = \int_M \sigma_1$, então existe um difeomorfismo $\phi : M \to M$ tal que $\phi^*(\sigma_1) = \sigma_0$.

4. Considere o torus $\mathbb{T}^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4 \cong S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1$, com forma simpléctica ω naturalmente induzida pela forma simpléctica standard ω_0 em $\mathbb{R}^4$. Dê exemplos de subvariedades simplécticas, isotrópicas, coisotrópicas e Lagrangianas de $(\mathbb{T}^4, \omega)$.

5. Sejam (M, ω) uma variedade simpléctica, $h : M \to \mathbb{R}$ uma função suave tendo 0 como valor regular e $Q \subset M$ a subvariedade de codimensão 1 (logo coisotrópica) definida por $Q = h^{-1}(0)$. Mostre que o campo vectorial Hamiltoniano X_h satisfaz
$$(X_h)_q \in (T_qQ)^\omega \,,\ \forall q \in Q \ .$$

6. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica e $Q \subset M$ uma subvariedade coisotrópica. Mostre que a distribuição $(TQ)^\omega \subset TQ$ é isotrópica e integrável.